

## Teilbarkeit

$$k \text{ teilt } n \iff n = k \cdot m \text{ mit } m \in \mathbb{N}_0 \iff k | n$$

$$\exists m \in \mathbb{N}_0 : n = k \cdot m$$

$$k \text{ teilt } n \text{ nicht} \iff n \neq k \cdot m \text{ für alle } m \in \mathbb{N}_0 \iff k \nmid n$$

$$\forall m \in \mathbb{N}_0 : n \neq k \cdot m$$

Teilbarkeit kann man den Zahlen ansehen!

teilbar durch 2, wenn die letzte Ziffer durch 2 teilbar ist.

3, wenn die QS durch 3 teilbar ist  $QS(137) = 1+3+7 = 11$

4, wenn die letzten beiden Stellen durch 4 teilbar ist

5, wenn die letzte Ziffer durch 5 teilbar ist

6, wenn 2 und 3 teilbar ist

7, wenn die alternierende Zer-QS durch 7 teilbar ist

8, wenn die letzten 3 Stellen durch 8 teilbar sind

9, wenn die Quersumme durch 9 teilbar ist

10, wenn die Zahl auf 0 endet.

Beispiel für 7:

$$36036 = 36 - 036 = 0 \text{ durch 7 teilbar}$$

$$35931 = 35 - 931 = -896 = -700 - 196 \checkmark$$

$$6675788 = 6 - 675 + 788 = 119 \checkmark$$

$$598334513 = 598 - 334 + 513 = 777 \checkmark$$

Aufgaben:

①  $l|k \text{ und } k|n \Rightarrow l|n$

②  $a|b \iff ac|bc$

③  $9|(a+2b) \iff 9|(100a+2b)$

①  $l|k \text{ und } k|n \Rightarrow l|n$

$$l|k \Rightarrow k = l \cdot m \text{ mit } m \in \mathbb{N}_0, m < k$$

$$k|n \Rightarrow n = k \cdot q \text{ mit } q \in \mathbb{N}_0, q < n$$

$$(l \cdot m) | n \rightarrow n = l \cdot m \cdot g \Rightarrow l | n$$

②  $a | b \Leftrightarrow a c | b c$

$$b = a \cdot m \quad \text{mit } m < b, m \in \mathbb{N}_0$$

$$b = a \cdot m \Leftrightarrow b \cdot c = a \cdot c \cdot m$$

$$b = a \cdot m \quad \checkmark$$

③  $9 | a + 2b \Leftrightarrow a + 2b = 9 \cdot m$

$$100a + 2b = 99a + (a + 2b) = 99a + 9 \cdot m - 9(11a + m) \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow 9 | 100a + 2b$$

$$9 | 100a + 2b \Leftrightarrow 100a + 2b = 9 \cdot m$$

$$99a + (a + 2b) = 9m$$

$$9 \cdot 11a + a + 2b = 9m$$

$$a + 2b = 9m - 9 \cdot 11a = 9(m - 11a)$$

oder:

$$9 | a + 2b$$

$$\Rightarrow \text{QS } (a + 2b) \text{ ist durch } 9 \text{ teilbar}$$

$$\Rightarrow \text{QS } (100a + 2b) \text{ ist durch } 9 \text{ teilbar}$$

## Primzahlen

Primzahl: hat genau 2 verschiedene natürliche Teiler  
(1 und sich selbst)  
 $p$  Primzahl

Nicht-Primzahl:  $n = p \cdot n_1$  mit  $n_1 > 1$

Eine Zahl die Primzahl ist, nennt man auch prim.

# Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung

Jede natürliche Zahl lässt sich als Produkt von Primzahlen schreiben (Diese (Produkt-) Darstellung ist eindeutig (bis auf die Reihenfolge der Faktoren)).

Gibt es unendlich viele Primzahlen?

Ja! Annahme Es gibt endlich viele Primzahlen  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$

Betrachte  $x = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$

$p_1 | x$ ? Nein, denn 1. Summand ist durch  $p_1$  teilbar, nicht

$p_2 | x$ ? Nein

$\vdots$

$p_n | x$ ? Nein

$\Rightarrow x$  ist neue Primzahl

$\downarrow$  da  $p_1, \dots, p_n$  alle Primzahlen

Gibt es eine Formel, die alle Primzahlen liefert?

Nein, es gibt nicht einmal eine Formel, die immer Primzahlen liefert!

aber: es gibt Formeln, die wahrscheinlicher eine Primzahl sind

Beispiele:

① Alle Primzahlen (außer 2) haben die Form  $p = 2n + 1$

② Alle Primzahlen haben die Form  $p = 4k + 1$  oder  $p = 4k + 3$

Begründung:  $p = 4k$  durch 4 teilbar

$p = 4k + 2$  durch 2 teilbar

③ Mersenne-Primzahl

$$M_p = 2^p - 1 \quad (\text{gilt gut bis } 2^{11} - 1; p = 11)$$

④ Fermatschen Primzahl

$$F_n = 2^{2^n} + 1 \quad (\text{gilt gut bis } n = 5)$$

⑤ Anwendung von Satz von Euklid

$$E = p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$$

$$p = 13: E = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30\,031 = 59 \cdot 509$$

## ⑥ Sieb des Eratosthenes

|               |               |    |               |    |              |               |               |              |               |
|---------------|---------------|----|---------------|----|--------------|---------------|---------------|--------------|---------------|
| <del>1</del>  | ②             | ③  | <del>4</del>  | ⑤  | <del>6</del> | ⑦             | <del>8</del>  | <del>9</del> | <del>10</del> |
| 11            | 12            | 13 | <del>14</del> | 15 | 16           | 17            | <del>18</del> | 19           | 20            |
| <del>21</del> | <del>22</del> | 23 | <del>24</del> | 25 | 26           | <del>27</del> | <del>28</del> | 29           | <del>30</del> |
| 31            | ...           |    |               |    |              |               |               |              |               |

2 alle Vielfachen von 2 streiche

3 alle Vielfachen von 3 streiche

⋮

### Aufgaben:

①  $P|n$ ,  $n = a \cdot b \Rightarrow P|a$  oder  $P|b$

1. Fall:  $b = p \cdot m \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow P|b$

2. Fall:  $a = p \cdot m \cdot \frac{1}{b} \Rightarrow P|a$

}  $\Rightarrow P|a$  oder  $P|b$

② Ist  $2^{38} - 1$  eine Primzahl?

$$2^{2 \cdot 19} - 1 = 2^{2^{19}} - 1 = 4^{19} - 1 = (2^{19})^2 - 1^2 = (2^{19} - 1)(2^{19} + 1)$$