

Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

$x^2 = -1$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$

Annahme: Es gäbe eine Zahl, die zum Quadrat -1 ergeben würde
 $i^2 = -1$

Dann hätte die Gleichung $x^2 = -1$ die Lösung $x_1 = i, x_2 = -i$

Beispiel:

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{1}{2} \cdot (-4 \pm \sqrt{-4})$$

$$\Rightarrow x_1 = -2 + i, \quad x_2 = -2 - i$$

Probe:

$$x = -2 + i$$

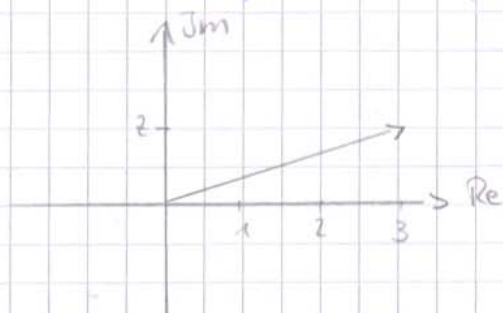
$$(-2 + i)^2 + 4(-2 + i) + 5 \stackrel{?}{=} 0$$

$$4 - 4i + i^2 - 8 + 4i + 5 \stackrel{!}{=} 0$$

Fundamentalsatz der Algebra

Ein Polynom n -ten Grades $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a$ hat in $\mathbb{C}$ n Nullstellen (Lösungen)

Darstellungsformen:



$$z = \underset{\substack{\text{Real-} \\ \text{teil}}}{x} + i \underset{\substack{\text{Imaginär-} \\ \text{teil}}}{y} \quad ; \quad \text{Re}, \text{Im} \in \mathbb{R}$$

Bsp.: $z = 3 + i$

Darstellung als Vektor

Länge vom Vektor:

$$|z| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

allgemein:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

wichtig: nicht i beim y mitnehmen

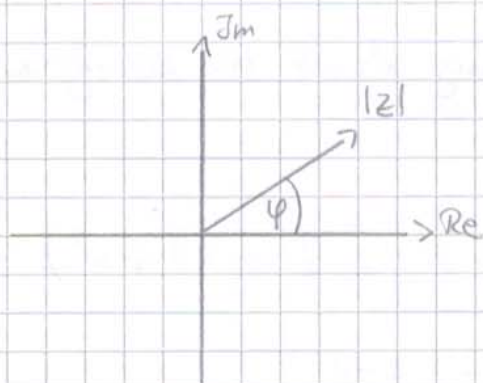
Rechenregeln:

$$z = 2 - 2i, \quad w = -1 + i$$

$$z + w = 2 - 2i - 1 + i = 1 - i$$

$$z \cdot w = (2 - 2i)(-1 + i) = -2 + 2i + 2i - 2i^2 = 4i$$

Polare Darstellung:



$$0 \leq \varphi < 360^\circ$$

$$z = |z| \cdot E(\varphi)$$

$$E(\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Umformung:

Kartesische Koordinaten $\leftrightarrow$ Polarkoordinaten

$$x = |z| \cos \varphi$$

$$y = |z| \sin \varphi$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x}$$

Aufgabe:

a) $z = -1 + i$

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan \varphi = -1 \Rightarrow \varphi = -45^\circ \Rightarrow \varphi = 315^\circ$$

b) $|z| = 2, \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}$

$$x = |z| \cos \varphi = 2 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = -1$$

$$y = |z| \sin \varphi = 2 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$z = -1 + \sqrt{3}i$$

c) $z = 2 - 2i$

$$|z| = |2 - 2i| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$

$$\tan \varphi = -\frac{2}{2} = -1 \Rightarrow \varphi = -45^\circ \Rightarrow \varphi = 315^\circ$$

Vorteil: Multiplikation

$$z = 2 - 2i \rightarrow z = 2\sqrt{2} \cdot e(315^\circ)$$

$$w = -1 + i \rightarrow z = \sqrt{2} \cdot e(135^\circ)$$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot e(315^\circ) \cdot e(135^\circ) \\ &= 4e(315^\circ + 135^\circ) = 4e(90^\circ) = 4i \end{aligned}$$

Beträge multiplizieren und Argumente addieren.

Division

$$a) \frac{1}{2+2i} = \frac{1 \cdot (2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \frac{2-2i}{4+4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$$

$$z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R} \quad (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2y = x^2 + y^2$$

konjugiert komplexe: $z = x+iy \quad \bar{z} = x-iy$

$$b) \frac{1}{i-1} = \frac{-i-1}{(i-1)(i+1)} = \frac{-i-1}{2} = -\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}$$

Aufgabe:

$$w = \frac{1+2i}{3-i} = \frac{(1+2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+7i-2}{9+1} = \frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$$

1.) Für welches $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\frac{z-1}{2} = \frac{1+2i}{z+1} \quad ?$$

$$(z-1)(z+1) = 2(1+2i)$$

$$z^2 - 1 = 2 + 4i$$

$$z^2 = 3 + 4i$$

$$z = x+iy \rightarrow (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{I) } x^2 - y^2 = 3 \\ \text{II) } 2xy = 4 \end{array} \right\} y = \frac{2}{x}$$

$$\text{in I) } x^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 3$$

$$\Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$\begin{aligned} u &= x^2 \\ \Rightarrow u^2 - 3u - 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (u-4)(u+1) = 0$$

$$\begin{matrix} x^2 = u \\ \Rightarrow \end{matrix} (x^2-4)(x^2+1) = 0$$

$$x_1 = 2 \rightarrow y = 1 \Rightarrow z = 2+i$$

$$x_2 = -2 \rightarrow y = 1 \Rightarrow z = -2-i$$