

# Kettenbrüche

Definition:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

Beispiel:

$$\boxed{1} + \frac{1}{\triangle 4 + \frac{1}{\circ 7 + \frac{1}{\triangle 2}}} = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{4 + \frac{2}{15}} = 1 + \frac{1}{\frac{62}{15}} = 1 + \frac{15}{62} = 1 \frac{15}{62} = \frac{77}{62}$$

⇒ Kettenbrüche können rationale Zahlen liefern.

Frage: Wie kommt man von der rationalen Zahl auf den Kettenbruch?

$$\frac{77}{62} = 1 + \frac{15}{62} = 1 + \frac{1}{\frac{62}{15}} = 1 + \frac{1}{4 + \frac{2}{15}} = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{15}{2}}} = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{2}}}$$

selbst:  $\frac{26}{99} = \frac{1}{\frac{99}{26}} = \frac{1}{3 + \frac{21}{26}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{26}{21}}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{5}{21}}} = \frac{1}{\boxed{3} + \frac{1}{\boxed{1} + \frac{1}{\boxed{4} + \frac{1}{\boxed{5}}}}$

Bekannt durch Euklidischen Algorithmus. Euklidischer Algorithmus von 77 und 62

$$\begin{array}{l|l} 77 = \boxed{1} \cdot 62 + 15 & \frac{77}{62} = \frac{1 \cdot 62 + 15}{62} = 1 + \frac{15}{62} = 1 + \frac{1}{\frac{62}{15}} = \\ 62 = \triangle 4 \cdot 15 + 2 & = 1 + \frac{1}{\frac{4 \cdot 15 + 2}{15}} = 1 + \frac{1}{4 + \frac{2}{15}} = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{15}{2}}} = \\ 15 = \circ 7 \cdot 2 + 1 & = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{2}}} \\ 2 = \triangle 2 \cdot 1 + 0 & \end{array}$$

Fazit: Aus Euklidischer Algorithmus sofort Kettenbruchdarstellung ablesbar.

## Euklidischer Algorithmus

$$99 = 3 \cdot 26 + 21$$

$$26 = 1 \cdot 21 + 5$$

$$21 = 4 \cdot 5 + 1$$

$$5 = 5 \cdot 1 + 0$$

$q \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow$  Kettenbruch bricht ab

Begründung:

" $\Rightarrow$ "  $q \in \mathbb{Q}$ , d.h.  $q = \frac{a_1}{a_2}$  mit  $a_1 \in \mathbb{Z}$ ,  $a_2 \in \mathbb{N}$

(falls  $a_1$  negativ, klammere  $-1$  aus,  $-1 \cdot \underbrace{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)}_{\text{positiv}}$ )

Euklidischer Algorithmus von 2 natürlichen Zahlen bricht ab,  
weil immer ein ggT von 2 natürlichen Zahlen existiert

$\Rightarrow$  Behauptung

" $\Leftarrow$ " Kettenbruch bricht ab.

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

rechnen  $\Rightarrow$

$q \in \mathbb{Q}$ , weil man nur Brüche addiert  
und das Inverse bildet.

Das Folle: Unendliche (also nicht abbrechende) Kettenbrüche sind eine Darstellungsform von irrationalen Zahlen.

$r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Leftrightarrow$  Kettenbruch bricht nicht ab  
(unendlicher Kettenbruch)

Beispiel:  $\sqrt{2}$

$$(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 2 - 1 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}} = \dots\end{aligned}$$

def.  $[1; 2, 2, 2, 2, \dots]$

Beispiel:  $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots]$

Goldener Schnitt:  $[0; 1, 1, 1, 1, \dots]$

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow x^2 = 1-x \Leftrightarrow \boxed{x^2 + x - 1 = 0}$$

$$\stackrel{x \neq 0}{\Rightarrow} x + 1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x + 1 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{1+x}$$

$$x = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}} = \dots = [0; 1, 1, 1, 1, \dots]$$

Ausblick: Periodisch unendliche Kettenbrüche sind Lösungen von quadratischen Gleichungen, wobei Lösung Wurzel sein muß, mit algebraischen Koeffizienten aus  $\mathbb{Z}$ . Nicht-periodische unendliche Kettenbrüche sind eben nicht Lösungen von quadratischen Gleichungen mit Koeffizienten aus  $\mathbb{Z}$ .

algebraische Zahlen: können als Lösung von Polynomen mit Koeffizienten aus  $\mathbb{Z}$  dargestellt werden.

Bsp.:

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, \dots] \text{ transzendental}$$

$$3\sqrt{2} = [1; 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 1, 14, \dots] \text{ algebraisch}$$

## Periodische unendliche Kettenbrüche

$$[0; 2, 3, 2, 3, 2, 3, \dots]$$

$$x = \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + x}}}} \Rightarrow x = \frac{1}{2 + \frac{1}{3+x}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\frac{2(3+x)+1}{3+x}} = \frac{3+x}{7+2x}$$

$$7+2x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x(7+2x) = 3+x \Leftrightarrow 2x^2 + 6x - 3 = 0$$

$$\text{selbst: } x = [3, 1, 2, 1, 2, \dots]$$

$$x = 3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}} \Leftrightarrow x - 3 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2+x-3}}$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = \frac{1}{\frac{1(x-1)+1}{x-1}} = \frac{x-1}{x} \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$$