

23.11.05

Euklidischer Algorithmus und ggT

$$\text{ggT}(a, b) = \max \{x \mid x \mid a \text{ und } x \mid b\}$$

sprich „größte Zahl, die a und b teilt“

Herkömmlich in der Schule: über Primfaktorzerlegung

Beispiel:

$$a = 3528 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \cdot 7^2$$

$$b = 3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^1$$

$$\text{ggT}(a, b) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 1 \cdot 7 = 252$$

Euklidischer Algorithmus liefert ein Verfahren, wie man den ggT zweier Zahlen bestimmen kann.

Wie funktioniert er? $3780 = 1 \cdot 3528 + 252$

$$3528 = 14 \cdot 252$$

Beispiel:

$$\text{ggT}(299, 247)$$

$$299 = 1 \cdot 247 + 52$$

$$\begin{array}{r} x \mid 299 \quad x \mid 247 \quad x \mid 52 \end{array}$$

$$\text{ggT}(247, 52)$$

$$247 = 4 \cdot 52 + 39$$

$$\begin{array}{r} x \mid 247 \quad x \mid 52 \quad x \mid 39 \end{array}$$

$$52 = 1 \cdot 39 + 13$$

$$39 = 3 \cdot 13$$

↖ ggT

über ①, ② und ③ mit den Zahlen 299 und 247

① ges. ggT (299, 247)

$$299 = 1 \cdot 247 + 52$$

$$247 = 4 \cdot 52 + 39$$

$$52 = 1 \cdot 39 + 13$$

$$39 = 3 \cdot 13$$

↖ ggT

② ges. $x \in \mathbb{N}$ mit $299 = x \cdot \text{ggT}$

$$39 = 3 \cdot 13$$

$$52 = 1 \cdot 3 \cdot 13 + 13 \cdot 1 = 4 \cdot 13$$

$$247 = 4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 13 + 3 \cdot 13 = 19 \cdot 13$$

$$299 = 1 \cdot 19 \cdot 13 + 4 \cdot 13 = 23 \cdot 13$$

③ ges. $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x \cdot 299 + y \cdot 247 = \text{ggT}$

$$299 = 1 \cdot 247 + 52 \quad \Leftrightarrow 52 = 299 - 1 \cdot 247$$

$$247 = 4 \cdot 52 + 39 \quad \Leftrightarrow 39 = 247 - 4 \cdot 52$$

$$52 = 1 \cdot 39 + 13 \quad \Leftrightarrow 13 = 52 - 1 \cdot 39$$

$$39 = 3 \cdot 13 + 0$$

Rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} := \left[\begin{smallmatrix} (a,b) \\ \uparrow \in \mathbb{R} \quad \uparrow \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{smallmatrix} \right] \text{ mit } \left[\begin{smallmatrix} (a,b) \\ \uparrow \in \mathbb{R} \quad \uparrow \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{smallmatrix} \right] \oplus \left[\begin{smallmatrix} (c,d) \\ \uparrow \in \mathbb{R} \quad \uparrow \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} (ad+bc, bd) \\ \uparrow \in \mathbb{R} \quad \uparrow \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{smallmatrix} \right]$$

$$\left[\begin{smallmatrix} (a,b) \\ \uparrow \in \mathbb{R} \quad \uparrow \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{smallmatrix} \right] \odot \left[\begin{smallmatrix} (c,d) \\ \uparrow \in \mathbb{R} \quad \uparrow \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{smallmatrix} \right] = \left[\begin{smallmatrix} (ac, bd) \\ \uparrow \in \mathbb{R} \quad \uparrow \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{smallmatrix} \right]$$

Rechne!

$$\begin{aligned} & \left[\begin{smallmatrix} (a,b) \\ \uparrow \in \mathbb{R} \quad \uparrow \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{smallmatrix} \right] \odot \left(\left[\begin{smallmatrix} (c,d) \\ \uparrow \in \mathbb{R} \quad \uparrow \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{smallmatrix} \right] \oplus \left[\begin{smallmatrix} (e,f) \\ \uparrow \in \mathbb{R} \quad \uparrow \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{smallmatrix} \right] \right) = \left[\begin{smallmatrix} (a,b) \\ \uparrow \in \mathbb{R} \quad \uparrow \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{smallmatrix} \right] \odot \left[\begin{smallmatrix} (cf+de, df) \\ \uparrow \in \mathbb{R} \quad \uparrow \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{smallmatrix} \right] = \\ & = \left[\begin{smallmatrix} (acf+ade, bdf) \\ \uparrow \in \mathbb{R} \quad \uparrow \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{smallmatrix} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right) = \frac{a}{b} \left(\frac{cf + ed}{df} \right) = \frac{acf + aed}{bdf}$$

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ mit $[(a, 1)]$ „Einbettung“

Umrechnung Dezimaldarstellung - Bruchdarstellung

Geg: Bruchdarstellung $\rightarrow$ Dezimaldarstellung

Bsp: $\frac{13}{17}$ $\xrightarrow{\text{Divisionsalgorithmus}}$ $13 \cdot 17 = 0$
 130

Geg: Dezimaldarstellung $\rightarrow$ Bruchdarstellung

Bsp: $7,05\overline{12}$ $0,00\overline{12}$

70k!

0,05 ok $0,05 = \frac{5}{100}$

$$\begin{aligned} 0,00\overline{12} &= \frac{1}{100} \cdot 0,1\overline{2} = \frac{1}{100} \left(\frac{12}{100} + \frac{12}{10000} + \frac{12}{1000000} + \dots \right) = \\ &= \frac{12}{100} \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{1000000} + \dots \right) = \\ &= \frac{12}{100} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{100} \right)^j = \frac{12}{100} \cdot \frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{100} - 1} = \\ &= \frac{12}{100} \cdot \frac{-\frac{1}{100}}{-\frac{99}{100}} = \frac{12}{100} \cdot \frac{1}{99} = \frac{12}{9900} = 0,00\overline{12} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 7,05\overline{12} = 7 + \frac{5}{100} + \frac{12}{9900} = 7 \frac{169}{3300}$$

Ferner für die geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

$$\sum_{k=1}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} - 1 = \frac{q^{n+1} - 1 - q + 1}{q - 1} = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n q^k \stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^{n+1} - q}{q - 1} \quad 0 < |q| < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{-q}{q-1}$$

In der Schule?

$$100 \cdot 0,00\overline{12} - 0,00\overline{12} = 99 \cdot 0,00\overline{12}$$

$$0,12\overline{12} - 0,00\overline{12} = 0,12 = \frac{12}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{100} = 99 \cdot 0,00\overline{12} \Rightarrow 0,00\overline{12} = \frac{12}{9900}$$

Beweis:

$$0,\overline{9} = 1$$

$$0,\overline{9} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{9}{10^j} = 9 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{10^j} = 9 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^j \stackrel{\substack{\uparrow \\ |0| < 1}}{=} 9 \cdot \frac{-\frac{1}{10}}{-\frac{9}{10} \cdot 1} =$$

$$= 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$$

In der Schule:

$$0,\overline{9} = 3 \cdot 0,\overline{3} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$