

# Vollständige Induktion

$$A(n), n \in \mathbb{N}$$

1.)  $A(1)$  ist wahr

2.)  $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

$$A(1) \Rightarrow A(2)$$

$$A(2) \Rightarrow A(3)$$

wichtig: nur in  $\mathbb{N}$  anwendbar

wichtig: formale

Beispiel:

①  $A(n) = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$  ist eine natürliche Zahl,  $n \in \mathbb{N}$

Ind.-Anfang: zu zeigen  $A(1)$  ist wahr

$$\text{Ind.-Start: } \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{3} \cdot 1^3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6}{6} = 1 \in \mathbb{N} \quad \checkmark$$

Ind.-Annahme:  $A(n)$  gilt nun für ein festes, aber beliebiges  $n \in \mathbb{N}$

Ind.-Schritt:  $n \mapsto n+1$

$$\begin{aligned} A(n+1) &= \frac{1}{6}(n+1) + \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{3}(n+1)^3 \\ &= \underbrace{\frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3}_{\text{Das ist natürliche Zahl wegen J. Annahme}} + \underbrace{1 + 2n + n^2}_{\text{Das ist eine natürliche Zahl, da } n \in \mathbb{N}, 2n \in \mathbb{N}, n^2 \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

②  $4n^3 - n$  durch 3 teilbar,  $n \in \mathbb{N}$

Ind.-Aufg.:  $n=1: 4 \cdot 1^3 - 1 = 3$ , 3 ist durch 3 teilbar  $\checkmark$

Ind.-An: gilt für  $A(n)$

Ind.-Schritt:  $n \mapsto n+1$

$$\begin{aligned} 4(n+1)^3 - (n+1) &= \underbrace{4n^3 - n}_{\text{durch 3 teilbar}} + \underbrace{12n^2 + 12n + 3}_{3(4n^2 + 4n + 1)} \\ &\quad \text{durch 3 teilbar} \end{aligned}$$

③  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2, \quad n \in \mathbb{N}$

Ind.-Auf:  $n=1: 1^3 = 1^2 \quad \checkmark$

Ind.-Ann.: gilt für  $A(n)$

Ind.-Schritt:  $n \mapsto n+1$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = (1 + 2 + \dots + n + (n+1))^2$$

n.S.  $[1 + 2 + \dots + n = (n+1) \cdot \frac{n}{2}]$

$$\begin{aligned} (1 + 2 + \dots + n + (n+1))^2 &= \left( \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \right)^2 = \\ &= \left( (n+1) \cdot \left( \frac{n}{2} + 1 \right) \right)^2 = (n+1)^2 \left( \frac{n+2}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

l.S.  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 =$

$$= (1 + 2 + \dots + n)^2 (n+1)^3 =$$

$$= \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2 (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} (n+1)^3 = \dots =$$

$$= (n+1)^2 \left( \frac{n+2}{2} \right)^2$$

④  $n \geq 2: n^3 - n$  ist durch 3 teilbar

1.)  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2.)  $n \geq 3: n^2 > 2n + 1$

Ind.-Auf:  $n=2: 2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$  ist durch 3 teilbar  $\checkmark$

Ind.-Ann.:  $A(n)$  ist wahr

Ind.-Schritt:  $n \mapsto n+1$

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1$$

$$= \underbrace{n^3 - n}_{\text{durch 3 teilbar}} + \underbrace{3n^2 + 3n}_{3(n^2 + n)} \\ \text{durch 3 teilbar}$$

1.) Ind.-Auf:  $n=1$

$$1 = 1^2 \quad \checkmark$$

Ind.-Ann.: Die Behauptung  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$  gilt für  $A(n)$

Ind.-Schritt:  $n \mapsto n+1$



$$1+3+5+\dots+(2n-1)+(2(n+1)-1)=n$$

$$n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \quad \checkmark$$

2.) J.A:  $n=3: 3^2 > 2 \cdot 3 + 1$

$$9 > 6+1=7 \quad \checkmark$$

J.V:  $n^2 > 2n+1$  für  $A(n)$  wahr

J.S:  $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > 2(n+1) + 1 = 2n + 2 + 1$

$$\Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 > 2n + 3$$

$$\Leftrightarrow n^2 + (2n+1) > (2n+1) + 2$$

$$\Leftrightarrow n^2 > 2 \quad \checkmark$$

## Peano - Struktur $(N, 1, S(n))$

(S1)  $S$  ist injektiv

(S2)  $1 \notin \text{Bild } S$

(S3) Induktionsaxiom:

$$\left. \begin{array}{l} M \subseteq N \\ 1 \in M \\ S(M) \subseteq M \end{array} \right\} \Rightarrow M = N$$

## Beispiele:

a)  $(N = \{1, -1\}, 1, S(n) = -1 \cdot n)$

(S1)  $S(1) = -1, S(-1) = 1 \quad \checkmark$

(S2) falsch, denn  $S(-1) = 1$

(S3)  $M = \{1\} \quad | \quad M = \{1, -1\}$

$S(M) = \{-1\} \not\subseteq M \quad | \quad 1 \in M$

$S(M) = \{1, -1\} \subseteq M \Rightarrow M = N$

$$b) \quad (\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}, 1, S(n) = n + 2)$$

$$(S1) \quad [\text{injektiv: } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$$

$$S(u_1) = S(u_2)$$

$$\Leftrightarrow n_1 + 2 = u_2 + 2 \Leftrightarrow n_1 = n_2 \checkmark$$

$$(S2) \quad S(n) = 1 \Leftrightarrow n + 2 = 1 \Leftrightarrow n = -1 \nmid \checkmark$$

$$(S3) \quad M = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$$

$$M \subset \mathbb{N}$$

$$1 \in M$$

$$S(M) = \{3, 5, 7, 9, \dots\} \neq M = \mathbb{N}$$

nicht erfüllt