

1. Klausur zu “Elemente der Zahlentheorie und Aufbau des Zahlensystems“

Name, Vorname: .

..... Geburtsdatum:

1	2	3	4	5	6	7	Σ
2,5 3	1	3,5	3	3	4	1	18,5

Wichtige Hinweise:

Näherung

1. Bitte tragen Sie auf **jedem** Blatt Ihren Namen ein.
2. Kontrollieren sie bitte, ob Sie alle 7 Aufgaben erhalten haben.
3. Arbeitszeit: 11.15 - 13.00 Uhr
4. Zugelassene Hilfsmittel: Schreibgerät, Taschenrechner
5. Bei Bedarf kann zusätzliches Papier angefordert werden.
6. Sämtliche Antworten sind mit Worten oder Rechnung zu begründen.

Name, Vorname: .

Aufgabe 1:

Definitionen:

a) Es sei $f : B \rightarrow A$ eine Abbildung. Geben Sie an, was man unter dem „Graph“ dieser Abbildung versteht.

b) Was versteht man unter einem kommutativen Monoid? (Wenn Sie den Begriff „Halbgruppe“ verwenden, müssen Sie diesen auch erklären).

4 Punkte

a) Ein Graph $\Gamma \subset B \times A$ ist für alle $b \in B$ und $a \in A$ mit $f(b) = a$, die ~~Schreibweise~~ ^{Teilmenge} $\{(b, a) : b \in B\}$ zu jedem Element aus der Quelle B wird ein Bild aus A zugeordnet.

b) Ein kommutatives Monoid ist eine Menge, ^{mit Verknüpfung „o“} die assoziativ, kommutativ ist und ein neutrales Element besitzt.

(Assoziativität gilt und $\exists$ neutr. El. $\Rightarrow$ Monoid;
komm. Monoid = Monoid und Kommutativität gilt)

Name, Vorname: ...

Aufgabe 2:

Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $6 \mid n^3 + 11n$

4 Punkte

Ind. nach n :

Ind. anf. 3 $n = 1$

$$n^3 + 11n = 12$$

$$6 \mid 12 \quad \checkmark$$

Ind. v. vor. 3 $6 \mid n^3 + 11n$ soll gelten $\forall n \in \mathbb{N}$

Ind. schl. 3 $n \rightarrow n+1$

$$(n+1)^3 + 11(n+1) = \quad \checkmark$$

Name, Vorname:

Aufgabe 3:

Es sei $(\mathcal{N}, 1, S)$ ein Peanotripel. Die Verknüpfung „ $\circ$ “ sei induktiv definiert durch:

i) $n \circ 1 := n$

ii) $n \circ S(m) := S(n \circ m)$

a) Zeigen Sie, dass für alle $m, n \in \mathcal{N}$ gilt: $S(n) \circ m = S(n \circ m)$

b) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung assoziativ ist.

c) Sei nun $(\mathcal{N}, 1, S)$ die Menge der natürlichen Zahlen. Berechnen Sie $3 \circ 4$.

6 Punkte

a) z.z. $S(n) \circ m = S(n \circ m) \forall m, n \in \mathcal{N}$

Bew. Ind. nach n ^{m (genügt)}

IA: $n=1$: 1. Fall: $m=1$

$$\begin{aligned} \underline{S(n) \circ m} &= S(1) \circ 1 \stackrel{i)}{=} S(1) \stackrel{i)}{=} S(1 \circ 1) \\ &= \underline{S(n \circ m)} \checkmark \end{aligned}$$

2. Fall: $m > 1$ ^{$m \rightarrow S(m)$}

$$S(n) \circ m = S(1) \circ m = \checkmark$$

IV: $S(n) \circ m = S(n \circ m)$ gilt $\forall m, n \in \mathcal{N}$

IS: $n \geq n+1$

$$\begin{aligned} \underline{S(n+1) \circ m} &= S(S(n)) \circ m = S(S(n) \circ m) \\ &\quad \uparrow \text{Def. von } S \quad \uparrow S(n), m \in \mathcal{N} \Rightarrow \text{IV gilt} \end{aligned}$$

hier nicht definiert, da
bei den Aufgaben a, b

$\mathcal{N}$ nicht unbedingt gleich

$\mathbb{N}$ gesetzt ist.

$$\begin{aligned} &= \underline{S(n+1) \circ m} \\ &\quad \uparrow \text{Def. von } S \end{aligned}$$

□

✓

3b) $\forall p, q, k \in N \quad \underline{2.23} (p \circ q) \circ k = p \circ (q \circ k)$

Induktion nach k :

1A: $k=1$

$$(p \circ q) \circ 1 \stackrel{\text{ii)}}{=} p \circ q \stackrel{\text{ii)}}{=} p \circ (q \circ 1) \quad \checkmark \quad \checkmark$$

IV: $(p \circ q) \circ k = p \circ (q \circ k) \quad \forall p, q, k \in W$

IS: $k \rightarrow k+1$)

$$(p \circ q) \circ (k+1) \stackrel{\text{Def. von } S}{=} (p \circ q) \circ S(k) \stackrel{\text{ii)}}{=} S((p \circ q) \circ k)$$

$$\underset{\text{iv}}{\uparrow} = S(\underset{\text{iii}}{\uparrow} \text{po}(\text{qok})) \quad \text{---} \quad \text{po} \underset{\text{iii}}{\uparrow} S(\text{qok})$$

$$\stackrel{\text{Def. von } S}{=} \text{pos}(qok) \stackrel{ii)}{=} \text{pos}(qok)$$

$$\stackrel{\text{ii)}}{=} p_0(q \circ S(k)) \stackrel{\text{Def. von } S}{=} p_0(q \circ (k+1)) \quad \checkmark$$

3c) $3 \circ 4 = 3 \circ S(3) \stackrel{\text{ii)}}{=} S(3 \circ 3) = (3 \circ 3) + 1 = ?$
 $\uparrow$ Def. von $S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ $\uparrow$ Def. von $S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

Name, Vorname:

Aufgabe 4:

Geben Sie eine Menge $N \subset \mathbb{N}$ mit 5 Elementen und eine Funktion $f: N \rightarrow N$ an mit folgenden Eigenschaften:

i) $1 \in N$

ii) f ist injektiv

iii) Es gilt das Induktionsaxiom, d. h. für alle Teilmengen $M \subset N$ mit $1 \in M$ und $f(M) \subset M$ gilt $N = M$

Begründen Sie alle Aussagen.

3 Punkte

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$f: N \rightarrow N$$

~~$f(n) = n+1$~~

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & n \leq 4 \\ 1 & n = 5 \end{cases}$$

Grund:

~~$1 \in N$~~ nach i)

$$\Rightarrow N = \{1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \quad \begin{matrix} x_2, x_3, x_4, x_5 \\ \in N \end{matrix}$$

ich nehme eine einfache Menge $N \in \mathbb{N}$
mit 5 Elementen

$$\text{mit } N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

und definiere die Funktion

f wie oben, so dass aber

f injektiv ist, d. h. ~~es gibt~~ ~~nur~~ genau
einen Wert für ein Urbild und zwei Urbilder
haben nicht denselben Wert.

Nach iii) muss ich schauen, dass

jedes Bild in derselben Menge ist,
aus der das Urbild stammt.

$\Rightarrow$ auch erfüllt mit Def. von oben
und Menge $N = \mathbb{N}$

- FO

d

1

6

10

Name, Vorname:

Aufgabe 6:

- a) Geben Sie die g -adische Entwicklung von $x = \frac{1}{5}$ für $g = 2$ und $g = 8$ an.
 b) Geben für den Fall $g = 8$ je ein Beispiel an für einen Bruch, dessen g -adische Entwicklung ein rein-periodischer Bruch mit Periodenlänge 1 bzw. 2 ist.
 4 Punkte

a) $g=2$:

$$\begin{aligned} 1 &= 0 \cdot 5 + 1 \Rightarrow a_0 = 0 \\ 2 &= 0 \cdot 5 + 2 \Rightarrow a_1 = 0 \\ 4 &= 0 \cdot 5 + 4 \Rightarrow a_2 = 0 \\ 8 &= 1 \cdot 5 + 3 \Rightarrow a_3 = 1 \\ 6 &= 1 \cdot 5 + 1 \Rightarrow a_4 = 1 \\ 2 &= 0 \cdot 5 + 2 \Rightarrow a_5 = a_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} = (0, \overline{0011})_2 \quad \checkmark$$

$g=8$:

$$\begin{aligned} 1 &= 0 \cdot 5 + 1 \Rightarrow a_0 = 0 \\ 8 &= 1 \cdot 5 + 3 \Rightarrow a_1 = 1 \\ 24 &= 4 \cdot 5 + 4 \Rightarrow a_2 = 4 \\ 32 &= 6 \cdot 5 + 2 \Rightarrow a_3 = 6 \\ 16 &= 3 \cdot 5 + 1 \Rightarrow a_4 = 3 \\ 8 &= 1 \cdot 5 + 3 \Rightarrow a_5 = a_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} = (0, \overline{1463})_8 \quad \checkmark$$

2.) Periodenlänge 1 $m, n \in \mathbb{N}$ $m < n$

$$a, T \in \mathbb{N} \quad m = \overset{=a_0}{0} \cdot n + \overset{=T_0}{T_0} \cdot \overset{=m}{\frac{m}{n}} = (a_0, \overline{a_1})_g$$

$$8m = a_1 \cdot n + T_1 \quad \text{mit } T_1 = T_0 = m$$

$$8m = a_2 \cdot n + T_2 \Rightarrow a_1 = a_2, T_1 = T_2 = m$$

$$\Rightarrow 8m - m = a_1 \cdot n = a_2 \cdot n \quad \left. \begin{array}{l} \text{Also:} \\ \text{Bsp: } m=5 \quad a_1=5 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7m = a_1 \cdot n \quad \left. \begin{array}{l} \text{Bsp: } m=5 \quad n=7 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{Probe: } \frac{5}{7} &\Rightarrow 5 = 0 \cdot 7 + 5 \Rightarrow a_0 = 0 \\ 40 &= 5 \cdot 7 + 5 \Rightarrow a_1 = 5 \\ 40 &= 5 \cdot 7 + 5 \Rightarrow a_2 = 5 \\ &\vdots \end{aligned}$$

~~5/7 = 0.714285...~~

Periodenlänge 28

$$\begin{aligned} m, n &\in \mathbb{N} \quad m < n \\ a, T &\in \mathbb{N} \quad m = 0 \cdot n + T_0 \\ 8m &= a_1 \cdot n + T_1 \\ 8T_1 &= a_2 \cdot n + T_2 \\ 8m &= a_3 \cdot n + T_3 \end{aligned}$$

$$\frac{m}{n} = (a_0, \overline{a_1 a_2})_8$$

$$\Rightarrow \text{I) } 8m - T_1 = a_1 \cdot n \Rightarrow T_1 = 8m - a_1 \cdot n \in \mathbb{N}$$

$$\text{II) } 8T_1 - m = a_2 \cdot n$$

$$\text{III) } 8(8m - a_1 \cdot n) - m = a_2 \cdot n$$

$$64m - 8a_1 n - m = a_2 \cdot n$$

$$63m = (8a_1 + a_2)n$$

$$\text{Also Bsp: } n=63 \quad a_1=1, a_2=2 \\ m=10$$

$$\begin{aligned} \text{Probe: } \frac{10}{63} &\Rightarrow 10 = 0 \cdot 63 + 10 \Rightarrow a_0 = 0 \\ 80 &= 1 \cdot 63 + 17 \Rightarrow a_1 = 1 \\ 136 &= 2 \cdot 63 + 10 \Rightarrow a_2 = 2 \\ 80 &= 1 \cdot 63 + 17 \Rightarrow a_3 = a_1 \end{aligned}$$

Name, Vorname:

Aufgabe 7:

Es seien $a, b, x \in \mathbb{N}$ mit $x|a \cdot b$ und $\text{ggT}(x, a) = 1$.

Zeigen Sie: $x|b$

4 Punkte

$$a, b, x \in \mathbb{N} \text{ mit } x|a \cdot b \text{ und } \text{ggT}(x, a) = 1$$

$$\underline{\text{z.z.}}: x|b$$

$$\underline{\text{Bew.}} \quad x|a \cdot b \not\Rightarrow x|a \text{ oder } x|b \quad \text{nur, wenn } x \text{ prim}$$

$$\Rightarrow x|b, \text{ weil } x \nmid a \text{ wg. } \text{ggT}(x, a) = 1$$