

2. Der Körper der rationalen Zahlen

Gruppe $(G, \circ)$ G Menge $\circ: G \times G \rightarrow G, (g_1, g_2) \mapsto g_1 \circ g_2$

$(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$. Je $g \cdot e = g = e \cdot g$ Monoid

$\forall g \exists h: g \cdot h = e = h \cdot g$ Inverse $h = g^{-1}$

$(G, \circ)$ abelsch $\iff g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$

Satz: Jede kommutative (nicht-leere) Halbgruppe $(H, \circ)$ lässt sich bis auf Isomorphie eindeutig in eine abelsche Gruppe $(G, \circ)$ einbetten, d.h. so dass die folgenden (universelle) Eigenschaft erfüllt ist:
Zu jedem Homomorphismus $\varphi: H \rightarrow K$, K abelsche Gruppe, gibt es genau einen Homomorphismus $\psi: G \rightarrow K$, mit $\psi|_H = \varphi$

$$g_1 \circ g_2 = g_1 \circ g_3 \Rightarrow g_2 = g_3 \quad (\text{Kürzungsregel})$$

$$\psi(g_1 \circ g_2) = \psi(g_1) \circ \psi(g_2) \quad \text{Homomorphismus}$$

bei Monoiden mit Kürzungsregel $\varphi(e) = e$, bei Gruppen

$$\psi(g^{-1}) = \psi(g)^{-1}$$

Zusatz: Ist $(H, \circ)$ ein Monoid, so erhält die Einbettung in G das neutrale Element.

$$\begin{array}{ccc} H & \hookrightarrow & G \\ & \searrow \varphi & \downarrow \exists! \psi \\ & & K \end{array}$$

Beweis:

Es sei $(H, \circ)$ eine kommutative Halbgruppe mit Kürzungsregel, $H \neq \emptyset$. Äquivalenzrelation auf

$$H \times H: (a, b) \sim (c, d) \iff a \circ d = c \circ b$$

* reflexiv: $(a, b) \sim (a, b) \iff a \circ b = a \circ b$

* symmetr.: $(a, b) \sim (c, d) \iff a \circ d = c \circ b \iff c \circ b = a \circ d$
 $\iff (c, d) \sim (a, b)$

* transitiv: $(a, b) \sim (c, d), (c, d) \sim (e, f)$

$$\iff a \circ d = c \circ b \wedge c \circ f = e \circ d$$

$$\Rightarrow a \circ f \circ d = a \circ d \circ f = c \circ b \circ f$$

$$= b \circ c \circ f = b \circ e \circ d$$

^{kürz.-}
 $\Rightarrow a \circ f = b \circ e = e \circ b$

_{Regel}
 $\Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$

Regel:

$$(a, b) \sim (a \circ c, b \circ c) \iff a \circ b \circ c = a \circ c \circ b$$

erweitern
 $\longrightarrow$

kürzen
 $\longleftarrow$

G bezeichne die Menge der Äquivalenzklasse

$[a, b]$ bezeichne die Klasse des Paares (a, b)

Verknüpfung:

$$[a_1, b_1] \circ [a_2, b_2] = [a_1 \circ a_2, b_1 \circ b_2]$$

komponentenweise Multiplikation.

Unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten

$$(a_1, b_1) \sim (c_1, d_1), (a_2, b_2) \sim (c_2, d_2)$$

$$\stackrel{!}{\Rightarrow} (a_1 \circ a_2, b_1 \circ b_2) \sim (c_1 \circ c_2, d_1 \circ d_2)$$

Berechne:

$$a_1 \circ a_2 \circ d_1 \circ d_2 = a_1 \circ d_1 \circ a_2 \circ d_2 = c_1 \circ b_1 \circ c_2 \circ b_2 = c_1 \circ c_2 \circ b_1 \circ b_2$$

Aufgrund der komponentenweisen Definition gelten

Assoziativ- und Kommutativgesetz

Behauptung:

$\{ (c, c) : c \in H \}$ ist eine Äquivalenzklasse

$$(c, c) \sim (d, d) \iff c \circ d = d \circ c$$

$$(c, c) \sim (d, e) \Rightarrow c \circ e = d \circ c = c \circ d \stackrel{\text{kürz.-}}{\Rightarrow} e = d$$

$$\Rightarrow (d, e) = (d, d)$$

$r = [c, c]$ ist neutrales Element. Aus Erweitern und

Kürzen folgt:

$$[a, b] \cdot r = [aoc, boc] = [a, b]$$

Inverse: $[a, b]^{-1} = [b, a] \iff [a, b] \circ [b, a] = [aob, boa] = [aob, aob] = r$

Einbettung: $H \hookrightarrow G, a \mapsto [aoc, c]$ für ein beliebiges $c \in H$
 $aocod = aodoc \implies [aoc, c] = [aod, c]$

injektiv: $[aoc, c] = [boc, c] \implies aococ = bococ \implies a = b$
 $H \ni e$ neutral, $e \mapsto [eoc, e] = [e, e] = r$

Seien eine abelsche Gruppe K und ein Homomorphismus $f: H \rightarrow K$ gegeben. Gesucht ist ein Homomorphismus $\psi: G \rightarrow K$ mit $\psi|_H = f$.

Eindeutigkeit: $\psi([a, b]) \circ f(b) = \psi([a, b]) \circ \psi([bob, b]) =$
 $\stackrel{\psi}{=} \psi([a, b] \circ [bob, b]) = \psi([aobob, bob]) = f(a)$
Homomorphismus
 $\implies \psi([a, b]) = f(a) \cdot (f(b))^{-1}$

Existenz: $[a, b] \mapsto f(a) \cdot (f(b))^{-1}$ unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten

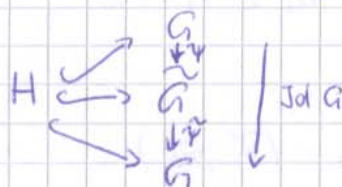
$$(a, b) \sim (c, d) \iff aod = cob \xrightarrow[\text{Homomorp.}]{f} f(a) \cdot f(d) = f(aod) = f(cob) = f(c) \cdot f(b)$$

$$\implies f(a) \cdot (f(b))^{-1} \cdot f(d) = f(c) \implies f(a) \cdot (f(b))^{-1} = f(c) \cdot (f(d))^{-1}$$

ψ Homomorphismus: $\psi([a_1, b_1] \circ [a_2, b_2]) = \psi([a_1 \circ a_2, b_1 \circ b_2]) =$
 $= f(a_1 \circ a_2) \cdot (f(b_1 \circ b_2))^{-1} = f(a_1) \cdot f(a_2) \cdot (f(b_1) \cdot f(b_2))^{-1} =$
 $= f(a_1) \cdot f(a_2) \cdot (f(b_2))^{-1} \cdot (f(b_1))^{-1} = \psi([a_1, b_1]) \cdot \psi([a_2, b_2])$

$(G, \circ)$ bis auf Isomorphie eindeutig:

Sei $(\tilde{G}, \circ)$ eine andere Erweiterung von $(H, \circ)$ mit den gleichen Eigenschaften.



$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\psi} \circ \psi = \text{Id } G \\ \psi \circ \tilde{\psi} = \text{Id } \tilde{G} \end{array} \right\} \psi, \tilde{\psi} \text{ zueinander invers Isomorphismen}$$

Anwendung:

$$(\mathbb{H}, +) = (\mathbb{N}, +)$$

$G = \mathbb{B}$ Gruppe der Bruchzahlen

Schreibweisen $\left[\frac{z}{n}\right] = \frac{z}{n} = (z, n)$ (kein Unterschied zwischen $z = \frac{z}{1}$ für die Einbettung $\text{Bruch} \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und Bruchzahl $\in \mathbb{B}$)

$\frac{z}{n} \xrightarrow{\text{Zähler}} z$
 $\frac{z}{n} \xrightarrow{\text{Bruchstrich}} /$
 $\frac{z}{n} \xrightarrow{\text{Nenner}} n$

Satz:

Gilt $\frac{z}{n} = \frac{\tilde{z}}{\tilde{n}}$ mit z, n teilerfremd, so gibt es ein $q \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{z} = q \cdot z$, $\tilde{n} = q \cdot n$ ($\frac{\tilde{z}}{\tilde{n}}$ entsteht aus $\frac{z}{n}$ durch Erweiterung mit q)

Beweis:

$$\frac{z}{n} = \frac{\tilde{z}}{\tilde{n}} \quad (z, n) = 1 \quad \Rightarrow \quad z \cdot \tilde{n} = \tilde{z} \cdot n \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow z | \tilde{z} \quad \text{Setze } q = \tilde{z} : z, \text{ also } \tilde{z} = q \cdot z$$
$$\Rightarrow z \cdot \tilde{n} = \tilde{z} \cdot n = q \cdot z \cdot n$$
$$\Rightarrow z \cdot q \cdot n \Rightarrow \tilde{n} = q \cdot n$$

Satz:

Jede Bruchzahl lässt sich eindeutig in der Form $\frac{z}{n}$ mit $(z, n) = 1$ darstellen

Beweis:

Sind Zähler und Nenner nicht teilerfremd, so erhält man die gewünschte Darstellung indem man durch den größten gemeinsamen Teiler kürzt.

$$\text{Sei nun } \frac{z}{n} = \frac{\tilde{z}}{\tilde{n}}, \quad (z, n) = (\tilde{z}, \tilde{n}) = 1$$

$$z \cdot \tilde{n} = \tilde{z} \cdot n \quad \Rightarrow \quad z | \tilde{z} \wedge \tilde{z} | z \quad \Rightarrow \quad z = \tilde{z} \quad (\text{Antisymmetrie})$$

$$\xrightarrow[\text{negd}]{\text{Kürzungsregel}} n = \tilde{n} \quad \square$$

Die Darstellung einer Bruchzahl in der Form $\frac{z}{n}$ mit $(z, n) = 1$ heißt vollständig gekürzt.

Anordnung

$$\frac{z_1}{n_1}, \frac{z_2}{n_2} \text{ vollständig gekürzt} \quad \frac{z_1}{n_1} < \frac{z_2}{n_2} \Leftrightarrow z_1 \cdot n_2 < z_2 \cdot n_1$$

Rechenregeln:

$$\frac{\tilde{z}_1}{\tilde{n}_1} < \frac{\tilde{z}_2}{\tilde{n}_2} \Leftrightarrow \tilde{z}_1 \cdot \tilde{n}_2 < \tilde{z}_2 \cdot \tilde{n}_1$$

Beweis:

$$q_1 = (\tilde{z}_1, \tilde{n}_1), \quad q_2 = (\tilde{z}_2, \tilde{n}_2)$$

$$\tilde{z}_1 = q_1 \cdot z_1, \quad \tilde{m}_1 = q_1 \cdot m_1, \quad \tilde{z}_2 = q_2 \cdot z_2, \quad \tilde{m}_2 = q_2 \cdot m_2$$

$$\frac{z_1}{m_1} = \frac{\tilde{z}_1}{\tilde{m}_1} < \frac{\tilde{z}_2}{\tilde{m}_2} = \frac{z_2}{m_2} \xLeftrightarrow{\text{Def.}} z_1 \cdot m_2 \neq z_2 \cdot m_1 \xLeftrightarrow{\text{Standardiz.}} q_1 z_1 q_2 m_2 < q_2 z_2 q_1 m_1$$

$$\Leftrightarrow \tilde{z}_1 \cdot \tilde{m}_2 < \tilde{z}_2 \cdot \tilde{m}_1 \quad \square$$

Satz: " $<$ " ist lineare Ordnung auf $\mathbb{B}$, bezüglich deren die Multiplikation monoton ist, aber keine Wohlordnung.