

Allgemein: J.A. $m+1 = 1+m$

$$\begin{aligned} \text{J.S. } m+S(u) &\stackrel{(*)}{=} m+(u+1) \stackrel{\text{Ass.}}{=} (u+m)+1 \stackrel{\text{Lo.}}{=} \\ &= 1+(u+m) \stackrel{\text{Jv.}}{=} 1+(m+m) \stackrel{\text{Ass.}}{=} (1+m)+m \stackrel{\text{Lo.}}{=} \\ &= (u+1)+m = S(u)+m \end{aligned}$$

27.10.05

* Beweis der Kürzungsregel

$$\text{J.A. } k+1 = u+1 \Rightarrow S(k) = S(u) \stackrel{\text{Sinj.}}{\Rightarrow} k=u$$

$$\text{J.S. } k+S(u) = m+S(u) \Rightarrow k+(u+1) = m+(u+1)$$

$$\stackrel{\text{hom.}}{\Rightarrow} k+(1+u) = m+(1+u) \stackrel{\text{ass.}}{\Rightarrow} (k+1)+u = (m+1)+u$$

$$\stackrel{\text{Jv.}}{\Rightarrow} k+1 = m+1 \Rightarrow S(k) = S(m) \stackrel{\text{Sinj.}}{\Rightarrow} k=m$$

Bemerkung:

1. Die Eigenschaften der Addition werden im folgenden ohne besondere Erwähnung benutzt.

2. Das gleiche gilt für das allgemeine Assoziativgesetz.

$$\begin{aligned} a_1+a_2+\dots+a_n &= ((a_1+a_2)+a_3)+\dots+a_n \\ &\stackrel{\text{Wek.}}{=} (a_1+\dots+a_k)+(a_{k+1}+\dots+a_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3+4+5+6 &= ((3+4)+5)+6 = (7+5)+6 \\ &= 12+6 = 18 \\ (3+4)+(5+6) &= 7+11 = 18 \end{aligned}$$

Anordnung:

Definition:

$m, n \in \mathbb{N}$. m ist kleiner als n - in Zeichen $m < n$ - wenn es ein $d \in \mathbb{N}$ gibt mit $m+d=n$

$$m < n : \Leftrightarrow \exists d \in \mathbb{N} : m+d=n$$

Variationen:

$$m \leq n : \Leftrightarrow m < n \text{ oder } m = n \quad \text{"kleiner-gleich"}$$

$$m > n : \Leftrightarrow n < m \quad \text{"größer"}$$

$$m \geq n : \Leftrightarrow m > n \text{ oder } m = n \quad \text{"größer-gleich"}$$

Kürzungsregel: $\Rightarrow$ d ist - wenn existiert - eindeutig bestimmt
heißt Differenz von m und n , symbolisch $d = n - m$

Hilfssatz:

$$m < S(n) \Rightarrow m \leq n$$

Beweis:

$$\text{Es sei } m + d = S(n); \quad d = S(n) - m$$

$$1. \text{ Fall: } d = 1 \Rightarrow S(m) = m + 1 = S(n) \xrightarrow{\text{Sij.}} m = n$$

$$2. \text{ Fall: } d = S(d') \Rightarrow S(n) = m + S(d') = S(m + d') \xrightarrow{\text{Sij.}} m + d' = n \\ \Rightarrow m < n$$

Satz:

Die Relation "kleiner" ist eine irreflexive Wohlordnung auf $\mathbb{N}$, derart dass die Addition monoton ist.

irreflexiv:

$$m < n \Rightarrow m \neq n$$

Wohlordnung:

$$\text{Ordnung: } k < m, m < n \Rightarrow k < n$$

linear, total: Trichotomie: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt entweder $m < n$ oder $m = n$ oder $n < m$ (ausschließendes "oder")

Wohlordnung: Jede nichtleere Teilmenge hat ein kleinstes Element

Monotonie:

$$m < n \Rightarrow k + m < k + n$$

Beweis:

1. Irreflexivität: Wir zeigen $m \neq m + d$ für alle d durch Induktion nach m

$$\text{I.A. } m = 1 \quad 1 + d = S(d) \neq 1$$

$$\text{I.S. } m \neq m + d \xrightarrow{\text{Sij.}} S(m) \neq S(m + d) = m + d + 1 = \\ = m + 1 + d = S(m) + d$$

2. Ordnung:

$$\begin{aligned}k+c &= m, \quad m+d = n \Rightarrow k+(c+d) = k+c+d \\&= m+d = n \\&\Rightarrow k \leq n\end{aligned}$$

Irreflexivität + Transitivität $\Rightarrow$ Antisymmetrie

$$m < n \Rightarrow m \neq n$$

$$m \geq n \Rightarrow m \neq n$$

$$m > n \Rightarrow m \neq n$$

$$m \leq n \Rightarrow m \neq n$$

3. Trichotomie: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: $m < n \vee m = n \vee m > n$

Induktion nach:

J.A. $m=1$.

1. Fall $n=1 \Rightarrow m=n$

2. Fall $n = S(m) = \tilde{n} + 1 = 1 + \tilde{n}$

$$\Rightarrow 1 \leq n$$

(Zwischenbemerkung: Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$1 \leq n, \quad 1 = \min \mathbb{N})$$

J.S

1. Fall: $m < n$ setze $d = n - m$

1. Unterfall $d=1 \Rightarrow S(m) = m+1 = n$

2. Unterfall $d = S(\tilde{d}) \Rightarrow S(m) + \tilde{d} =$

$$= m+1+\tilde{d} = m+d = n$$

$$\Rightarrow S(m) \leq n$$

(Zwischenbemerkung: $m < n \Rightarrow S(m) \leq n$)

2. Fall: $m=n \Rightarrow S(m) = m+1 > n$

3. Fall: $m > n$ setze $d = m - n$

$$\Rightarrow S(m) = m+1 = m+d+1 =$$

$$= n + S(d)$$

$$\Rightarrow S(d) > n$$

(Zwischenbemerkung: $m \leq n \leq m \Rightarrow m = n$)

4. Wohlordnung $\emptyset \neq A \subset \mathbb{N}$ setze $\mathcal{S} = \{s \in \mathbb{N} \mid \forall a \in A, s \leq a\}$

(Menge der unteren Schranke von A)

$1 \in \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Sei $a \in A \Rightarrow a < S(a) \Rightarrow S(a) \neq a$
 $\Rightarrow S(a) \notin \mathcal{S} \Rightarrow \mathcal{S} \neq \mathbb{N}$

Induktionsaxiom $\Rightarrow$ Wir finden $s_0 \in \mathcal{S}$ mit $S(s_0) = s_0 + 1 \notin \mathcal{S}$

$\Rightarrow$ Wir finden weiter $a_0 \in A$ mit $a_0 < S(s_0) = s_0 + 1 \Rightarrow a_0 \leq s_0$

$\Rightarrow s_0 \leq a_0 \leq s_0 \Rightarrow a_0 = s_0 \Rightarrow s_0 \in A \Rightarrow s_0 = \min. A$

5. Monotonie $m < n$, $d = (n - m) \Rightarrow (k + m) + d = k + (m + d) =$
 $= k + n \Rightarrow k + m < k + n$

Bemerkung: Auch diese Anordnungseigenschaften werden im folgenden kommentarlos benutzt.

Multiplikation

Für jede natürliche m wird die „Multiplikation mit m “ als Abbildung $m^b: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto m_n^b = m \cdot n$ rekursiv definiert durch

$$\begin{array}{ccc} 1 & \mathbb{N} & \xleftarrow{S} \mathbb{N} \\ \downarrow & \downarrow \text{ub} & \downarrow \text{ub} \\ m & \mathbb{N} & \xleftarrow{m^b} \mathbb{N} \end{array}$$

$$m \cdot 1 = m$$

$$m \cdot S(n) = m + (m \cdot n)$$

$$m \cdot (n+1) = m + (m \cdot n)$$

Allgemein hat man damit die Multiplikation: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$,
 $(m, n) \mapsto m \cdot n$.

Satz $(\mathbb{N}, \cdot)$ ist ein kommutatives Monoid mit Kürzungsregel. Die Multiplikation ist monoton und verhält sich gegenüber der Addition distributiv.

Monoid = Halbgruppe mit neutralem Element

Es ist zu zeigen:

$$1 \cdot u = u = u \cdot 1$$

neutrales Element

$$(h \cdot m) \cdot u = h \cdot (u \cdot u)$$

Halbgruppe

$$m \cdot n = n \cdot m$$

kommutativ

$$k \cdot u = k \cdot u \Rightarrow u = n$$

Kürzungsregel

$$h(u+v) = h \cdot u + h \cdot v$$

Distributivität

$$m < n \Rightarrow hu < hv$$

Monotonie

1. Neutrales Element

1.) Ist rechtsneutral nach Definition $1 \cdot m$ durch Ind. nach m

J.A. $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1$

J.S. $1 \cdot S(m) = 1 + (1 \cdot m) \stackrel{J.A.}{=} 1 + m = m + 1 = S(m)$

2. Halbgruppe

$S(n) \cdot m = m + (n \cdot m)$ durch Induktion nach m

J.A. $S(u) \cdot 1 = S(u) = 1 + u = 1 + (1 \cdot u)$

J.S. $S(u) \cdot S(m) = S(n) + (S(n) \cdot m) \stackrel{J.A.}{=} S(n) + m + (n \cdot m) =$
 $= n + 1 + u + (n \cdot m) = S(m) + n(n \cdot m)$
 $= S(u) + (n \cdot S(m))$