

$$\begin{array}{ccc}
 1 \in N & \xleftarrow{s} & N \\
 \downarrow & \downarrow x & \downarrow x \\
 \hat{a} \in A & \xleftarrow{f} & A
 \end{array}$$

Beweis:

1. Eindeutigkeit. Es seien x und y solche Abbildungen.

Setze $M = \{n \in N \mid x_n = y_n\} \subset N$ zu zeigen $M = N$.

$$x_1 = \hat{a} = y_1 \Rightarrow 1 \in M$$

$$n \in M \Rightarrow x_{s(n)} = f(x_n) = f(y_n) = y_{s(n)} \Rightarrow s(n) \in M$$

$$\Rightarrow M = N$$

24.10.05

2. Existenz Konstruktion des Graphen der gesuchten

Abbildung. Sei $\underline{H} = \{H \subset N \times A \mid (1, \hat{a}) \in H \wedge$

$$(u, a) \in H \Rightarrow (s(u), f(a)) \in H\}$$

$H \neq \emptyset$, denn $N \times A \in \underline{H}$ Setze $G = \bigcap \underline{H}$

1. Behauptung: $G \in \underline{H}$

$$(1, \hat{a}) \in H \text{ für alle } H \in \underline{H} \Rightarrow (1, \hat{a}) \in G$$

$$(n, a) \in G \Rightarrow (n, a) \in H \text{ für alle } H \in \underline{H}$$

$$\Rightarrow (s(n), f(a)) \in H \text{ für alle } H \in \underline{H}$$

$$\Rightarrow (s(n), f(a)) \in G$$

2. Behauptung:

G , die „kleinste“ Menge in $\underline{H}$, ist Graph einer Abbildung

zu zeigen: Zu jedem $n \in N$ gibt es genau ein $a \in A$ mit $(n, a) \in G$.

sehe:

$$M = \{n \in N \mid \exists! a \in A (n, a) \in G\}$$

$1 \in M$:

$$\text{Existenz: } (1, \hat{a}) \in G$$

Eindeutigkeit: Annahme $(1, b) \in G$

$$\text{mit } b \neq \hat{a} \Rightarrow G \setminus \{(1, b)\} \in \underline{H}$$

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Minimalität von G .

$n \in \mathbb{N}$: Finde genau ein a mit $(s(n), a) \in G$

$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists! \tilde{a} \in A$ mit $(n, \tilde{a}) \in G$

$\Rightarrow (s(n), f(\tilde{a})) \in G$; Setze $a = f(\tilde{a})$
(Existenz)

Eindeutigkeit: Sei $(s(n), b) \in G$.

Da $G \setminus \{(s(n), b)\} \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ Es gibt $(n, \tilde{a}) \in G$ mit $(s(n), f(\tilde{a})) = (s(n), b)$

$\Rightarrow s(n) = s(n), f(\tilde{a}) = b$
 $\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $n = n \quad \quad \tilde{a} = \tilde{a}$

$\Rightarrow b = f(\tilde{a}) = f(\tilde{a}) = a$

$\Rightarrow (s(n), b) = (s(n), a)$

3. Behauptung: Die zu dem Graphen G gehörende Abbildung x hat die gewünschten Eigenschaften:

$(1, \hat{a}) \in G \Rightarrow x_1 = \hat{a}$

$x_n = a \Rightarrow (n, a) \in G \Rightarrow (s(n), f(a)) \in G$

$\Rightarrow x_{s(n)} = f(a) = f(x_n)$ q.e.d.

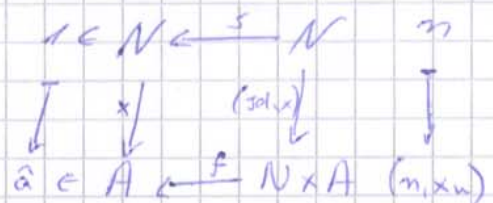
Verallgemeinertes Rekursionsprinzip

$(\mathbb{N}, 1, S)$ Peanostruktur, A Menge, $\hat{a} \in A$, $f: \mathbb{N} \times A \rightarrow A$

$\Rightarrow \exists! x: \mathbb{N} \rightarrow A$ mit $x_1 = \hat{a}$

$x \circ S = f \circ (Id, x)$

$x_{s(n)} = f(n, x_n)$



Beispiel: Satz von Bolzano und Weierstraß:

Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge

Folgerung:

Es gibt bis auf Isomorphie höchstens eine Peanostruktur.

Beweis:

$(N, 1, s)$, $(\tilde{N}, \tilde{1}, \tilde{s})$ seien Peanostrukturen

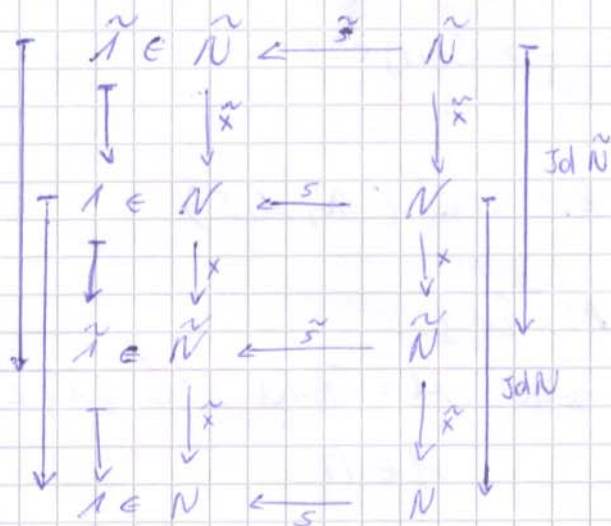
$(N, 1, s)$ Peanostruktur $\Rightarrow \exists! x : x_1 = \tilde{1} \quad x \circ s = \tilde{s} \circ x$

$(\tilde{N}, \tilde{1}, \tilde{s})$ " $\Rightarrow \exists! \tilde{x} : \tilde{x}_1 = 1 \quad \tilde{x} \circ \tilde{s} = s \circ \tilde{x}$

Für die Verkettung $\tilde{x} \circ x$ gilt: $(\tilde{x} \circ x)_1 = 1$,

$$\begin{aligned} (\tilde{x} \circ x) \circ s &= \tilde{x} \circ (x \circ s) = \tilde{x} \circ (\tilde{s} \circ x) = (\tilde{x} \circ \tilde{s}) \circ x \\ &= (s \circ \tilde{x}) \circ x = s \circ (\tilde{x} \circ x) \end{aligned}$$

$(N, 1, s)$ Peanostruktur $\Rightarrow \tilde{x} \circ x = \text{Id}$.



Analog: $x \circ \tilde{x} = \text{Id}$

$\Rightarrow x, \tilde{x}$ sind zueinander inverse Isomorphismen.
q.e.d.

Axiom:

Es gibt eine Peanostruktur.

Nir wählen eine solche und bezeichnen sie mit $(N, 1, s)$ und nennen die Elemente natürliche Zahlen,

$s(1) = 2$ „zwei“, $s(2) = 3$ „drei“ ...

Verwendung des Induktionsaxioms

Es sei $E(n)$ eine Eigenschaft die einer natürlichen Zahl zukommen kann oder nicht. Gilt dann:

- J. A (Induktionsanfang): 1 hat die Eigenschaft $E(1)$
- J. S (Induktionsschluss): Wenn n die Eigenschaft $E(n)$ hat, so hat $S(n)$ die Eigenschaft $E(S(n))$

dann haben alle natürlichen Zahlen die Eigenschaft $E(n)$

Beweis: $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ hat die Eigenschaft } E(n)\} \subset \mathbb{N}$
J. A $\Rightarrow 1 \in M$
J. S $\Rightarrow S(n) \in M$
 $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} M = \mathbb{N}$

Eigenschaften von $(\mathbb{N}, 1, S)$

1.) Bild $S = \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Beweis: setze $M = \text{Bild } S \cup \{1\} \subset \mathbb{N}$

$$1 \in M$$

$$n \in M \Rightarrow S(n) \in \text{Bild } S \Rightarrow S(n) \in M$$

$$\Rightarrow M = \mathbb{N}; 1 \notin \text{Bild } S$$

$$\Rightarrow \text{Bild } S = \mathbb{N} \setminus \{1\} \quad \text{q.e.d.}$$

2.) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \neq S(n)$

Beweis: J. A. $1 \notin \text{Bild } S \Rightarrow 1 \neq S(1)$
J. S. $n \neq S(n) \Rightarrow S(n) \neq S(S(n))$
 $\downarrow$
injektiv

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} n \neq S(n)$$

Addition: Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist genau eine Abbildung $m^\# : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gegeben durch die Rekursion

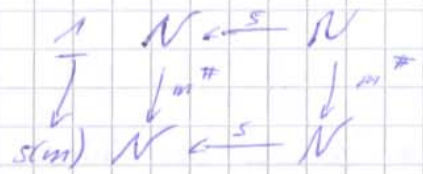
$$m_1^\# = S(m)$$

$$m_{S(m)}^\# = S(m_m^\#)$$

$$m+1 \stackrel{(*)}{=} S(m)$$

$$m + S(u) \stackrel{(**)}{=} S(m+u)$$

$$m + (u+1) \stackrel{(**)}{=} (m+u)+1$$



Schreibe $m_n^\# = m+n$

damit ist eine Abbildung $+$:

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, (m, n) \mapsto m+n$$

definiert.

Satz: $(\mathbb{N}, +)$ ist eine kommutative Halbgruppe mit Kürzungsregeln.

Halbgruppe: $(k+m)+n = k+(m+n)$ Assoziativität

Kommutativ: $m+u = n+m$

Kürzungsregel: $k+u = m+n \Rightarrow k=n$

Beweis: * Assoziativität durch Induktion nach n

$$\text{J.A. } (k+m)+1 \stackrel{(**)}{=} k+(m+1)$$

$$\begin{aligned} \text{J.S. } (k+m)+S(u) &\stackrel{(**)}{=} S((k+m)+u) \stackrel{J.V.}{=} \\ &= S(k+(m+u)) \stackrel{(***)}{=} k+S(m+u) \stackrel{(***)}{=} \\ &= k+(m+S(u)). \end{aligned}$$

* Kommutativität:

$$1.\text{Schritt: } m+1 = 1+m$$

$$\begin{aligned} \text{J.A. } 1+1 &= 1+1 \quad S(m)+1 \stackrel{(*)}{=} (m+1)+1 \stackrel{J.V.}{=} \\ &= (1+m)+1 \stackrel{\text{Ass.}}{=} 1+(m+1) \stackrel{(*)}{=} \\ &= 1+S(m) \end{aligned}$$