

$$e) \quad a \in \mathcal{G} \quad b \in \mathbb{Q} \setminus \mathcal{G} \quad a+c < b+c \Rightarrow a+c < 2c \Rightarrow c > \frac{a+c}{2}$$

$$(a < c) \quad \Rightarrow \quad c \leq b \Rightarrow a < b$$

$$c = \sup \mathcal{G}$$

$$K = \mathbb{Q} \quad \mathcal{G} = \mathbb{Q}_0^- \cup \{a \in \mathbb{Q}^+ : a^2 < 2\}$$

Nachweis der Schnitteigenschaften: $0 \in \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{G} \neq \emptyset$

12.12.05

$$2^2 = 4 > 2 \notin \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{G} \neq \mathbb{Q}$$

$$a \in \mathcal{G}, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathcal{G} \Rightarrow b > 0, b^2 > 2$$

$$a \in \mathbb{Q}_0^- \Rightarrow a \leq 0 < b \Rightarrow a < b \quad (1. \text{ Fall})$$

$$a > 0, a^2 < 2. \text{ Annahme } b < a \Rightarrow b^2 < ab < a^2 < 2 \quad \text{Widerspruch (2. Fall)}$$

$$\Rightarrow a < b$$

c) Zu zeigen $a \in \mathcal{G} \Rightarrow$ Es gilt $\hat{a} \in \mathcal{G}$ mit $a < \hat{a}$

$$1. \text{ Fall: } a < 1 \quad \text{Setze } \hat{a} = 1$$

$$2. \text{ Fall: } 1 \leq a \quad \text{Betrachte } f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, x \mapsto x^2 - 2$$

$$f(a) = a^2 - 2 < 0 \quad f(2) = 2$$

Verbindungsgerade $(a, a^2 - 2)$ $(2, 2)$

$$\frac{0 - 2}{\hat{a} - 2} = \frac{a^2 - 4}{a - 2} \Rightarrow \frac{\hat{a}}{-2} + 1 = \frac{a - 2}{a^2 - 4} = \frac{1}{a + 2}$$

$$\hat{a} = 2 - \frac{2}{a + 2} = 2 \cdot \frac{a + 1}{a + 2}$$

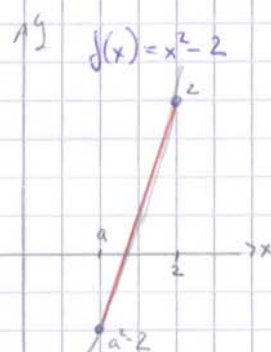
$$a < \hat{a}$$

$$\Leftrightarrow a < 2 \cdot \frac{a + 1}{a + 2} \Leftrightarrow a^2 + 2a < 2a + 2 \quad \checkmark$$

$$\hat{a}^2 < 2$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot \frac{(a + 1)^2}{(a + 2)^2} < 2 \Leftrightarrow 4a^2 + 8a + 4 < 2a^2 + 8a + 8$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 < 4 \Leftrightarrow a^2 < 2 \quad \checkmark$$



Behauptung:

Dieses $\mathcal{G}$ besitzt keine Schnittzahl

zu zeigen: $\mathbb{Q} \setminus \mathcal{G}$ besitzt kein Minimum

zu jedem $b \in \mathbb{Q}^+$ und $b^2 \geq 2$ existiert $\hat{b} \in \mathbb{Q}$

mit $\hat{b} \leq b, \hat{b}^2 \geq 2$

$x^2 = 2$ in $\mathbb{Q}$ unlösbar $\Rightarrow b^2 > 2$

Ansatz: $\hat{b} = \frac{1}{2} \left(b + \frac{2}{b} \right)$

$$\hat{b} \leq b \iff \frac{1}{2} \left(b + \frac{2}{b} \right) \leq b \iff b^2 + 2 \leq 2b^2 \iff 2 \leq b^2$$

$$b^2 \geq 2 \iff \frac{1}{4} \left(b^2 + \frac{4}{b^2} \right) \geq 2 \iff b^4 + 4b^2 + 4 \geq 8b^2$$

$$\iff b^4 - 4b^2 + 4 \geq 0 \iff (b^2 - 2)^2 \geq 0$$

Erinnerung an die Analysis: $\mathbb{K}$ archimedischer Körper

Definitionen: 1.) Eine Folge (a_i) in $\mathbb{K}$ heißt Nullfolge, wenn gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists i_0 \in \mathbb{N} \quad \forall i \geq i_0: |a_i| \leq \frac{1}{n}$$

"Jeden Intervall $]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ enthält ein Endstück der Folge (a_i) "

2.) Eine Folge (a_i) in $\mathbb{K}$ hat den Grenzwert $a \in \mathbb{K}$, in Zeichen:

$a = \lim_{i \rightarrow \infty} a_i$, wenn die Folge $(a_i - a)$ eine Nullfolge ist, also wenn es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $i_0 \in \mathbb{N}$ gibt, derart dass das mit i_0 beginnende Endstück der Folge (a_i) ganz in dem Intervall $[a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}]$ liegt.

3.) Eine Folge heißt konvergent, wenn sie einen Grenzwert besitzt.

4.) Eine Folge (a_i) in $\mathbb{K}$ heißt Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $i_0 \in \mathbb{N}$ gibt, derart dass für alle $i_1, i_2 \geq i_0$ gilt $|a_{i_1} - a_{i_2}| \leq \frac{1}{n}$ (Das mit i_0 beginnende Endstück der Folge (a_i) liegt ganz in dem Intervall $[a_{i_0} - \frac{1}{n}, a_{i_0} + \frac{1}{n}]$)

$\mathbb{K} \supset \mathbb{R}$ Durchmesser: $\sup \{ |a - b| : a, b \in \mathbb{R} \}$, falls existiert.

"Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $i_0 \in \mathbb{N}$, derart dass

das mit i_0 beginnende Endstück der Folge einen Durchmesser $\leq \frac{1}{n}$ hat."

Beispiele:

1.) $k > 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{n}\right)$ ist Nullfolge

2.) Für jedes $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ist die Folge $\left(\frac{1}{a^n}\right)$ eine Nullfolge.

Wir zeigen durch Induktion $a^n > n$ für alle n

J.A.: $a^1 = a > 1$

J.S.: $a^{n+1} = a^n \cdot a = a^n (1+d) = a^n + a^n \cdot d \stackrel{J.V.}{>} n+1$

Also gilt zu jedem gegebenen n für $i \geq i_0 = n$

$$\frac{1}{a^i} \leq \frac{1}{a^{i_0}} = \frac{1}{a^n} < \frac{1}{n}$$

3.) konstante Folgen sind konvergent $a_i = 0$ für alle $i \Rightarrow a_i - a = 0$

4.) Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge

Beweis: $a = \lim_{i \rightarrow \infty} a_i$ Zu $n \in \mathbb{N}_0$ wähle i_0 mit $|a - a_i| \leq \frac{1}{2n}$

für $i \geq i_0$. Dann gilt für $i_1, i_2 \geq i_0$:

$$\begin{aligned} |a_{i_1} - a_{i_2}| &\leq |a_{i_1} - a + a - a_{i_2}| \leq \\ &\leq |a_{i_1} - a| + |a - a_{i_2}| \leq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

5.) Jede konstante Folge ist Cauchy-Folge

6.) Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge ist Cauchy-Folge.

Beweis: Es sei (a_i) monoton wachsend, $a_i \leq a$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Gegeben $n \in \mathbb{N}$, wähle mit Archimedes

$$k_1 > n(a - a_1), \quad k_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow a_1 + \frac{k_1}{n} > a$$

Wohlordnung $\Rightarrow$ es gibt $k_0 = \min \{k \in \mathbb{N}, a_1 + \frac{k}{n} > a\}$

$\Rightarrow a_1 + \frac{k_0 - 1}{n}$ ist keine obere Schranke für die Folge (a_i)

$\Rightarrow$ es gilt i_0 mit $a_{i_0} > a_1 + \frac{k_0 - 1}{n} \Rightarrow$ für $i_1, i_2 \geq i_0$

$$a_1 + \frac{10^{-1}}{n} < a_{i_0} \leq a_{i_1}, a_{i_2} \leq a_1 + \frac{10^{-1}}{n} \Rightarrow a_{i_1}, a_{i_2} \in [a_0 + \frac{10^{-1}}{n} - \frac{1}{n}, a_0 + \frac{10^{-1}}{n}]$$

$$\Rightarrow |a_{i_1} - a_{i_2}| \leq \frac{1}{n}.$$

Definitionen:

1.) Eine Folge $a_0, a_1, a_2, \dots, a_i, \dots$ in $\mathbb{K}$ heißt Dezimalbruch wenn gilt: $a_0 \in \mathbb{N}_0$, $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

2.) Die Folge $(\sum_{j=0}^i \frac{a_j}{10^j})$ ist die zugehörige Dezimalfolge.

3.) Ein Dezimalbruch konvergiert, wenn die zugehörige Dezimalfolge konvergiert.

Satz:

Jede Dezimalfolge ist eine Cauchy-Folge

Beweis:

Die Dezimalfolgen sind Folgen in $\mathbb{Q}$, monoton wachsend und durch $a_0 + 1$ nach oben beschränkt. $\square$

Satz:

Jeder periodischer Dezimalbruch konvergiert.

Beweis:

Jeder periodischer Dezimalbruch ist Dezimalbruchentwicklung einer rationalen Zahl.

$$\sum_{j=0}^i \frac{a_j}{10^j} \leq a < \sum_{j=0}^i \frac{a_j}{10^j} + \frac{1}{10^i} \quad \text{für alle } i$$

$$\Rightarrow 0 < a - \sum_{j=0}^i \frac{a_j}{10^j} < \frac{1}{10^i} < \frac{1}{i}$$

$$|a - \sum_{j=0}^i \frac{a_j}{10^j}| < \frac{1}{i} \leq \frac{1}{n} \quad \text{für } i \geq i_0 = n$$

$\square$