

$(\mathbb{R}[t], +)$ additive Gruppe (ohne Beweis)

Multiplikation assoziativ: $\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot t^k\right) \cdot \sum_{r=0}^{\infty} c_r t^r =$
 $= \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\ell} a_j b_{\ell-j}\right) t^{\ell}\right) \cdot \sum_{r=0}^{\infty} c_r t^r = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^s \left(\sum_{j=0}^{\ell} a_j b_{\ell-j} c_{s-\ell}\right) t^s =$
 $= \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \cdot \sum_{r=0}^{\infty} c_r t^r\right) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j\right) \left(\sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k=0}^q b_k c_{q-k} t^q\right) =$
 $= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=0}^s a_j \cdot b_{s-j} \cdot c_s = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{j=0}^s a_j \cdot b_{s-j} \cdot c_s = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{j=0}^s \sum_{\ell=0}^{s-j} a_j b_{\ell} c_{s-j-\ell} t^s$

8.12.05

Intermezzo: Elemente der offenen Inzidenzgeometrie

Definition:

Ein Paar (P, G) , bestehend aus einer Menge P (der Punkte) und einer Teilmenge $G \subset \text{Pot } P$ heißt affine Inzidenzebene, wenn gilt:

1.) Zu je zwei verschiedenen Punkten $p, q \in P$ gibt es genau eine Gerade $g \in G$ mit $p, q \in g$ (Verbindungsgerade)



2.) Zu jedem Paar (p, g) mit $p \in P, g \in G, p \notin g$ gibt es genau eine Gerade h mit $p \in h, g \cap h = \emptyset$ (Parallele zu g durch p)



3.) Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen

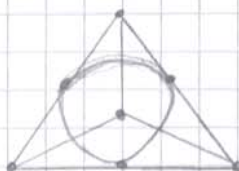


Beispiele:

K sei ein Körper $P = K^2$

$G = \{ \{t, t\} \mid t \in K \} \cup \{ \{t, mt+c \mid t \in K \} \mid m, c \in K \}$

$K = \mathbb{I}_2$



Satz von Desargues (Beauner)

$ABC, A'B'C'$ Dreiecke, $A \neq A', B \neq B', C \neq C'$

AA', BB', CC' kopunktal, $AB \parallel A'B', BC \parallel B'C' \Rightarrow AC \parallel A'C'$

Pappos $\Rightarrow$ Desargues $\Rightarrow$ kleiner Desargues $\Rightarrow$ kleiner Pappos

Behauptung: $a \cup (ab)c \parallel a' \cup bc$

Desargues $\Rightarrow a' \cup bc \parallel a'T, a' \cup bc \parallel T \cup (ab)c$

$$\Rightarrow a'T \parallel T \cup (ab)c \Leftrightarrow a'T = T \cup (ab)c = a' \cup (ab)c$$

$\Rightarrow$ Behauptung

Algebraische Begründung und axiomatische Charakterisierung der reellen Zahlen

$\mathbb{K}$ sei ein fester angeordneter Körper ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}$)

Definition: 1.) Eine Teilmenge $\sigma \subset \mathbb{K}$ heißt Dedekindscher Schnitt, wenn gilt:

a) $\emptyset \neq \sigma \neq \mathbb{K}$

b) Für alle $a \in \sigma, b \notin \sigma$ gilt $a < b$

c) σ besitzt kein Maximum

2.) Ein Element $s \in \mathbb{K}$ heißt Schnittzahl für den Schnitt σ , wenn gilt $s = \sup \sigma$ ($\Rightarrow s = \min \mathbb{K} \setminus \sigma$)

Beispiele: 1.) Wähle $c \in \mathbb{K}$, $\sigma = \{a \in \mathbb{K} : a < c\}$ ist Schnitt mit Schnittzahl c

Beweis: a) $\emptyset \neq \sigma$ $0 < 1 \Rightarrow -1 < 0 \Rightarrow c-1 < c \Rightarrow c-1 \in \sigma$

$\sigma \neq \mathbb{K}$ $\Rightarrow c < c+1 \Rightarrow c+1 \in \mathbb{K} \setminus \sigma$

c) $a \in \sigma \Rightarrow a+a < a+c \Rightarrow 2a < a+c$
 $\Rightarrow a < \frac{a+c}{2}$