

5.12.05

(K, P) angeordneter Körper

K Körper, P Positivbereich für K

$$K = P \cup \{0\} \cup -P, \quad P + P \subset P, \quad P \cdot P \subset P$$

$$a < b \iff b - a \in P$$

Monotoniegesetze $a < b, c \in K \Rightarrow a + c < b + c,$
 $a < b, c \in -P \Rightarrow b \cdot c < a \cdot c$

Für alle $a \in -P, b \in P, c \in K$ gilt

$$a < 0 < b$$

$$0 < c^2$$

$$1 \in P$$

Beweis: $a < b \Rightarrow b - a \in P \Rightarrow (b + c) - (a + c) = b - a \in P \Rightarrow a + c < b + c$

$$a < b, c \in P \Rightarrow b - a, c \in P \Rightarrow b \cdot c - a \cdot c = (b - a)c \in P$$

$$\Rightarrow ac < bc$$

$$a \in -P \Rightarrow -a \in P \Rightarrow 0 - a = -a \in P \Rightarrow a < 0$$

$$b \in P \Rightarrow b - 0 = b \in P \Rightarrow 0 < b$$

$$c \in P \Rightarrow c^2 \in P$$

$$c \in -P \Rightarrow c < 0 \Rightarrow 0 = 0 \cdot c < c^2 \Rightarrow c^2 \in P$$

$$1 = 1^2 \in P$$

Zusatz: Der eindeutig bestimmte Homomorphismus $\gamma:$
 $\mathbb{Z} \rightarrow K$ mit $\gamma(1) = 1$ ist injektiv und es gilt
 $\gamma(\mathbb{N}) \subset P$

Beweis: $\gamma(\mathbb{N}) \subset P$ durch Induktion

J.A. $\gamma(1) = 1 \in P$

J.S. $\gamma(n+1) = \gamma(n) + \gamma(1) = \gamma(n) + 1 \stackrel{I.H.}{\in} P$

Injektivität: $\gamma(m) = \gamma(n)$ o.B.d.A. $m < n \Rightarrow d = n - m \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow \gamma(m) = \gamma(n) = \gamma(m + d) = \gamma(m) + \gamma(d)$

$\rightarrow y(d)=0$ Widerspruch zu $y(d) \in \mathbb{P}$

□

Folgerung: Ein angeordneter Körper „enthält“ die ganzen Zahlen als Teilring und hat damit selbst unendlich viele Elemente.

$$y: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_p \quad y(p\mathbb{Z}) = \{0\}$$

Primzahl

Satz: Jeder angeordnete Körper enthält $\mathbb{Q}$ als Teilkörper

Beweisskizze: $y: \mathbb{Z} \rightarrow K$ Setze $y(\frac{z}{n}) = y(z) \cdot y(n)^{-1}$ □

Beispiele:

1, $(\mathbb{Q}, \mathbb{B})$ ist angeordneter Körper

2, $\mathbb{Q}(t)$ Körper der rationalen Funktionen in der Unbestimmten t über $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q}(t) \ni f: \frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n}{b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_m t^m}$$

$$a_n \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, b_n \in \mathbb{B}$$

f positiv: $a_n \in \mathbb{B}$ unabhängig von der Anzahl der Repräsentanten

$P = \{f \in \mathbb{Q}(t) : f \text{ positiv}\}$ ist Positivbereich für $\mathbb{Q}(t)$

offensichtlich $\mathbb{Q}(t) = P \cup \{0\} \cup -P$

$$f = \frac{\dots a_n t^n}{\dots b_m t^m}, \quad g = \frac{\dots c_p t^p}{\dots d_q t^q} \quad a_n, b_m, c_p, d_q \in \mathbb{B}$$

$$f+g = \frac{\dots a_n d_q t^{n+q} + c_p b_m t^{m+p}}{\dots b_m d_q t^{m+q}}, \quad b_m d_q \in \mathbb{B}$$

3. Fälle:

1.) $n+q < m+p \Rightarrow$ Grad des Zählers von $f+g = m+p$
 $c_p \cdot b_m \in \mathbb{B}$

2.) $n+q = m+p \Rightarrow$ Grad des Zählers $a_n d_q + c_p b_m \in \mathbb{B}$

3.) $m+p < n+q \Rightarrow$ Grad des Zählers von $f+g = n+q$ $a_n d_q \in \mathbb{B}$

$$f \cdot g = \frac{\dots a_n c_p t^{n+p}}{\dots b_m d_q t^{m+q}} \quad \begin{array}{l} a_n \cdot c_p \in \mathbb{B} \\ b_m \cdot d_q \in \mathbb{B} \end{array}$$

Definition:

Ein archimedisch angeordneter Körper ist ein angeordneter Körper, derart dass jedes (positive) Element von einer natürlichen Zahl übertroffen wird.

Beispiele:

1.) $\mathbb{Q}$ ist archimedisch angeordnet, $a \in \mathbb{B}$

$$\Rightarrow a < [a] + 1 \in \mathbb{N}$$

2.) $\mathbb{Q}$ ist nicht archimedisch angeordnet:

$$t - n = \frac{-n + 1 \cdot t}{1} \in \mathbb{P} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow n < t \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Geometrische Begründung der reellen Zahlen

Gegeben sei eine Strecke als Maßeinheit.

Auschaunng: Jede Strecke hat eine Länge, jedes Rechteck hat eine Fläche:

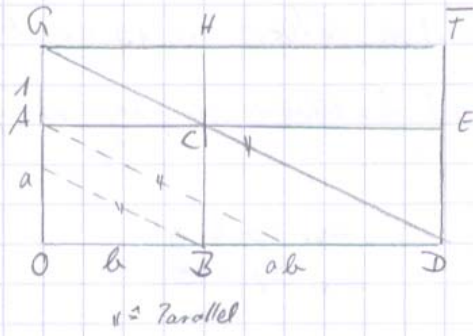
ausgedrückt durch Maßzahlen. Die rationalen Zahlen reichen dafür nicht aus.

Hilbertsche Streckenrechnung:

Addition:



Multiplikation:



$$\overline{ODG} = \overline{DGF}$$

$$\overline{ACG} = \overline{CHH}$$

$$\overline{BDC} = \overline{DCE}$$

$$\overline{OBGA} = \overline{CEFH}$$

$$\Rightarrow \overline{CE} = a \cdot b$$

$$\parallel$$

