

Festsetzung $a_0, a_1, \dots, a_k \overline{9} = a_1, a_1, \dots, (a_{k+1})0 \dots$
 $a_k < 9$

$(\mathbb{B}, +)$ kommutative Halbgruppe mit Kürzungsregel

Erweiterung zu Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$, additive Gruppe der rationalen Zahlen

Darstellung: $[b_1, b_2]$

1. Fall: $b_1 > b_2$ $[b_1, b_2] = b_1 - b_2 \in \mathbb{B}$ positiv

$b_1 = b_2$ $[b_1, b_2] = 0$

$b_1 < b_2$ $[b_1, b_2] = -(b_2 - b_1)$ negativ

Bezeichnung und Definition: Für $\alpha \in \mathbb{Q}$ wird gesetzt

Betrag von α : $|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \alpha \text{ positiv} \\ 0 & \alpha = 0 \\ -\alpha & \alpha \text{ negativ} \end{cases}$ $-(-b) = b$
 $b \in \mathbb{B}$

Das additive Inverse von $\alpha \in \mathbb{Q}$ heißt Gegenzahl zu α : $-\alpha$
 Zahl und Gegenzahl haben gleichen Betrag. Die natürlichen Zahlen zusammen mit der Null und ihren Gegenzahlen bilden die Menge der ganzen Zahlen!

24.11.05

$(\mathbb{B}, +) \subset (\mathbb{B}_0, +) \subset (\mathbb{Q}, +)$

Minuszeichen in drei Bedeutungen: $-0 = 0$

$b \in \mathbb{B}$ $-b$ ist das Inverse zu b in $(\mathbb{Q}, +)$ „Vorzeichen“

$r \in \mathbb{Q}$ $-r$ ist Gegenzahl r in $(\mathbb{Q}, +)$ „einstellige Operation“

$r, s \in \mathbb{Q}$ $r - s = r + (-s)$ eindeutige Lösung der Gleichung $x + s = r$ in $(\mathbb{Q}, +)$ „zweistellige Operation“

nicht kommutativ, 0 ist nur rechtsinvers, statt des Assoziativgesetzes

gilt $r - (s - t) = (r - s) + t$

$r - (s - t)$ ist die eindeutige Lösung der Gleichung $x + (s - t) = r$
 $((r - s) + t) + (s - t) = r + (-s) + t + s + (-t) = r + 0 + t + (-t) = r$
 $\Rightarrow (r - s) + t$ ist ebenfalls Lösung dieser Gleichung

□

Notiere: $-(-r) = r$

Anordnung in $\mathbb{Q}$ $r < s \Leftrightarrow s - r$ positiv

Satz: " $<$ " ist irreflexive, totale Ordnung auf $\mathbb{Q}$, derart dass die Addition monoton ist.

Beweis:

irreflexiv: $s - r$ positiv $\Rightarrow s - r \neq 0 \Rightarrow s \neq r$

transitiv: $r < s, s < t \Rightarrow s - r$ positiv, $t - s$ positiv

$$\Rightarrow (s - r) \in \mathbb{B}, (t - s) \in \mathbb{B} \Rightarrow t - r = (s - r) + (t - s) \in \mathbb{B}$$

$$\Rightarrow r < t$$

Trichotomie: Für alle s, r gilt entweder $s - r \in \mathbb{B}$ ($\Rightarrow r < s$)

oder $s - r = 0$ ($\Rightarrow r = s$) oder $-(s - r) \in \mathbb{B}$ ($s < r$)

$$r < s \Rightarrow s - r \text{ positiv} \Rightarrow (s + t) - (r + t) = s - r \text{ positiv}$$

$$\Rightarrow r + t < s + t$$

□

Multiplikation:

$$\mathbb{B}_0: 0 \cdot r = 0 = r \cdot 0$$

$$\text{positiv} \cdot \text{negativ} \quad 0 = r \cdot 0 = r \cdot (s + |s|) = rs + |r| \cdot |s|$$

$$\Rightarrow rs = -|r| \cdot |s| \Rightarrow |s| = -s$$

r, s beide negativ

$$0 = r \cdot (s + |s|) = rs + (-|r| \cdot |s|) \Rightarrow rs = |r| \cdot |s|$$

$$\text{Definition: } r \cdot s = \begin{cases} 0, & \text{falls } r=0 \text{ oder } s=0 \\ |r| \cdot |s|, & \text{falls } r, s \text{ das gleiche Vorzeichen haben} \\ -|r| \cdot |s|, & \text{falls } r, s \text{ verschiedene Vorzeichen haben} \end{cases}$$

Merksregel:

$$\text{plus} \cdot \text{plus} = \text{minus} \cdot \text{minus} = \text{plus}$$

$$\text{plus} \cdot \text{minus} = \text{minus} \cdot \text{plus} = \text{minus}$$

Rechenregel: $|r \cdot s| = |r| \cdot |s|$

$$\begin{aligned} r &\leq |r| \\ |r+s| &\leq |r| + |s| \\ r \cdot s < 0 \quad |r+s| &= ||r| - |s|| \end{aligned}$$

Satz:

1.) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ist bezüglich der Multiplikation abgeschlossen
("nullteilerfrei")

2.) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe

3.) Die Distributivgesetze gelten: $(r+s) \cdot t = rt + st$
 $(r-s) \cdot t = rt - st$

4.) Die Multiplikation mit einer positiven Zahl ist monoton:

$$r < s, 0 < t \Rightarrow rt < st$$

Die Multiplikation mit einer negativen Zahl ist antiton:

$$r < s, t < 0 \Rightarrow st < rt$$

Beweis:

$$1.) s, r \neq 0 \Rightarrow |r| \neq 0, |s| \neq 0 \Rightarrow |r| \cdot |s| \neq 0 \Rightarrow rs \neq 0$$

2.) assoziativ Eine rationale Zahl ist durch Betrag und Vorzeichen bestimmt. $|(r \cdot s) \cdot t| = |r \cdot s| \cdot |t| = (|r| \cdot |s|) \cdot |t| = |r| \cdot (|s| \cdot |t|) = |r| \cdot |s \cdot t| = |r \cdot (s \cdot t)|$ und $(r \cdot s) \cdot t$ und $r \cdot (s \cdot t)$ sind beide genau dann positiv, wenn entweder alle drei Faktoren positiv sind oder dies für genau einen Faktor gilt.

$$\text{neutrales Element: } 1 \cdot r = r = r \cdot 1$$

$$\text{inverses Element: } r \text{ positiv} \Rightarrow r^{-1} = \frac{1}{r}$$

$$r \text{ negativ} \Rightarrow r^{-1} = \frac{1}{|r|}$$

3.) Übung

$$4.) r < s, v < t \Rightarrow s - r \in \mathbb{B}, t \in \mathbb{B} \Rightarrow (s - r) \cdot t \in \mathbb{B}$$

$$\stackrel{v}{st - rt} \Rightarrow vt < st$$

$$r < s, t < 0 \Rightarrow (s-r) \in \mathbb{B}, -t \in \mathbb{B} \Rightarrow r \cdot (-t) < s(-t)$$

$$r < s \Rightarrow st < rt$$

$\mathbb{Q}$ Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{Q}^+ (= \mathbb{B})$ Menge der positiven rationalen Zahlen, $\mathbb{Q}_0^+ = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$

nicht-negativ

$\mathbb{Q}^-$ Menge der negativen rationalen Zahlen $\mathbb{Q}_0^- = \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$

nicht-positiv

$-\mathbb{N} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}$ Menge der negativen ganzen Zahlen

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N}$ Menge der ganzen Zahlen

$$\mathbb{Q} \ni r \quad r \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow |r| \in \mathbb{N}_0$$

Lemma: $\mathbb{Z}$ ist gegenüber der Multiplikation abgeschlossen

Beweis: $y, z \in \mathbb{Z} \Rightarrow |y|, |z| \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow |y \cdot z| = |y| \cdot |z| \in \mathbb{N}_0$
 $\Rightarrow y \cdot z \in \mathbb{Z}$ □

Teilbarkeit in $\mathbb{Z}$ $y \mid z \Leftrightarrow \exists x. xy = z$

Division mit Rest in $\mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N}$: $z = x \cdot y + r, r < y$

Beispiel: $z = -7, y = 3 \quad z = (-3) \cdot 3 + 2$

$$x = \left\lfloor \frac{z}{y} \right\rfloor \text{ die größte ganze Zahl kleiner gleich } \frac{z}{y}$$

Definition: Ein Tripel $(R, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge R und zwei zweistelligen Verknüpfungen $+, \cdot$ auf R heißt Ring, wenn gilt:

1.) $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe (additive Gruppe)

2.) $(R, \cdot)$ ist eine Halbgruppe

3.) Die Distributivgesetze gelten:

$$(r+s) \cdot t = rt + st, \quad r(s+t) = rs + rt$$

Es handelt sich um

- 1.) einen Ring mit Eins, wenn $(R, +)$
- 2.) einen kommutativen Ring, wenn $(R, +)$ eine kommutative Halbgruppe ist
- 3.) einen nullteilerfreien Ring, wenn er kommutativ ist und $R \setminus \{0\}$ multiplikativ abgeschlossen ist.

Beispiele:

- 1.) $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ nullteilerfreie Ringe mit Eins
- 2.) $2\mathbb{Z} = \{z \in \mathbb{Z} : 2|z\}$ ist nullteilerfreier Ring (ohne Eins)
- 3.) Sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ fest gewählt. Wir definieren
 $x, y \in \mathbb{Z}$ kongruente modulo m , wenn $x - y$ durch m teilbar ist
 $(\Leftrightarrow x, y$ haben bei der Division mit Rest durch m den gleichen Rest)

Beweis:

$$\left. \begin{array}{l} x - y = z \cdot m, \quad x = \tilde{x} \cdot m + r_x \\ y = \tilde{y} \cdot m + r_y \end{array} \right\} x - y = (\tilde{x} - \tilde{y}) \cdot m + r_x - r_y = z \cdot m$$

$$\left. \begin{array}{l} (\tilde{x} - \tilde{y} - z) \cdot m = r_y - r_x \\ |\tilde{x} - \tilde{y} - z| \neq 0 \Rightarrow |(\tilde{x} - \tilde{y} - z) \cdot m| = |\tilde{x} - \tilde{y} - z| \cdot m \geq m \\ |r_y - r_x| < m \end{array} \right\} \begin{array}{l} \tilde{x} - \tilde{y} - z = 0 \\ \Rightarrow r_y - r_x = 0 \\ r_y = r_x \end{array}$$

Bezeichnung:

x, y kongruent modulo $m \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{m}, x \equiv y(m)$
 $\equiv(m)$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.

Beweis:

Symmetrisch $x - y = m \cdot z \Rightarrow y - x = m \cdot (-z)$

reflexiv $x - x = 0 \cdot m$ Kongruenzklassen = Restklassen

transitiv $x - y = z \cdot m, w - x = v \cdot m \Rightarrow w - y = w - x + x - y = (v + z) \cdot m$

m	-5	-4	-3	-2	...
	0	1	2	3	
(Zg-klassen)	5	6	7	8	
	10	11	12	13	
	15	16	17	18	

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv y(m) \\ \tilde{x} \equiv \tilde{y}(m) \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + \tilde{x} = y + \tilde{y}(m) \\ x \cdot \tilde{x} = y \cdot \tilde{y}(m) \end{array}$$