

Satz:

Jede Bruchzahl besitzt eine eindeutige Dezimalbruchentwicklung, diese ist periodisch. Sie ist genau endlich (oder abbrechend), wenn der Nenner bei vollständig gekürzter Darstellung nur die Primfaktoren 2 und 5 enthält.

b -Bruchzahl: Es gibt ein b mit $10^k b \in \mathbb{N}$

Beweis:Existenz:

Sei $b = \frac{z}{n} \in \mathbb{B}$ gegeben

Wir setzen $a_0 = \left\lfloor \frac{z}{n} \right\rfloor$, $z_0 = z - a_0 n < n$.

$$\frac{z_0}{n} < 1 \xrightarrow{\text{für } h=0} a_0 \leq b < a_0 + 1; a_0 n \leq z = a_0 n + z_0 < a_0 n + n$$

Division mit Rest:

$$10z_0 = a_1 n + z_1 \geq a_1 n, z_1 < n, \frac{z_1}{n} < 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq a_1 \leq 10 \cdot \frac{z_0}{n} < 10 \Rightarrow a_1 \in \{0, 1, \dots, 9\}$$

$$a_0 + \frac{a_1}{10} = a_0 + \frac{z_0}{n} - \frac{z_1}{10n} \leq b \leq a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}$$

Fortsetzung des Verfahrens rekursiv a_k, z_k mit

$$10z_k = a_{k+1} \cdot n + z_{k+1}, z_{k+1} < n, \frac{z_{k+1}}{n} < 1$$

$$a_{k+1} = \left\lfloor \frac{10z_k}{n} \right\rfloor$$

$$z_{k+1} = 10z_k - a_{k+1} n = 10z_k - \left\lfloor \frac{10z_k}{n} \right\rfloor \cdot n$$

$$0 \leq a_{k+1} = \frac{10z_k}{n} - \frac{z_{k+1}}{n} \leq \frac{10z_k}{n} < 10$$

$$\Rightarrow a_{k+1} \in \{0, 1, \dots, 9\}$$

Wir beweisen durch Induktion nach $k \in \mathbb{N}_0$

$$(*) \quad b = \sum_{j=0}^k \frac{a_j}{10^j} + \frac{z_k}{10^{k+1} n}$$

J.A.: $b = a_0 + \frac{z_0}{n}$ so gemacht

$$\begin{aligned} \text{J.S.: } \sum_{j=0}^{k+1} \frac{a_j}{10^j} + \frac{z_{k+1}}{10^{k+2} n} &= \sum_{j=0}^k \frac{a_j}{10^j} + \frac{a_{k+1}}{10^{k+1}} + \frac{z_{k+1}}{10^{k+2} n} \stackrel{\text{J.V.}}{=} \\ &= \left(b - \frac{z_k}{10^{k+1} n} \right) + \frac{a_{k+1} + z_{k+1}}{10^{k+1} n} = \left(b - \frac{z_k}{10^{k+1} n} \right) + \frac{10z_k}{10^{k+1} n} - b \end{aligned}$$

$$\sum_{j=0}^h \frac{a_j}{10^j} \leq b = \sum_{j=0}^h \frac{a_j}{10^j} + \frac{1}{10^h} \cdot \frac{z_h}{n} < \sum_{j=0}^h \frac{a_j}{10^j} + \frac{1}{10^h}$$

Periodizität: Für alle z_h gilt $0 \leq z_h < n$. Spätestens für $h > n+1$ gibt es $j_1 \leq h$ mit $z_{j_1} = z_h$

$$\Rightarrow 10^{z_h} = 10^{z_{j_1}} = a_{j_1+1}n + z_{j_1+1} \Rightarrow a_{j_1+1} = a_{h+1}, z_{j_1+1} = z_{h+1}$$

Da nur endlich viele Reste z_j auftreten können und die nächste Stelle a_{j+1} immer nur von dem vorhergehenden Rest abhängt, ebenso der Rest muss nach einer gewissen Periode sich alles wiederholen.

Behauptung: Die Dezimalbruchentwicklung von $b = \frac{z}{n}$ läuft genau dann ab, wenn es ein k gibt mit $10^k b \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{"} \Rightarrow \text{" } b &= \sum_{j=0}^h \frac{a_j}{10^j}, \text{ falls } z_n = 0 \\ \Rightarrow 10^h b &= \sum_{j=0}^h a_j \cdot 10^{h-j} \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{"} \Leftarrow \text{" } \text{Sei } 10^h b &\in \mathbb{N} \\ \mathbb{N} \rightarrow 10^h b &= \sum_{j=0}^h a_j \cdot 10^{h-j} + \frac{z_h}{n} \\ \Rightarrow 1 &> \frac{z_h}{n} \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \frac{z_h}{n} = 0 \Rightarrow z_h = 0 \end{aligned}$$

Eindeutigkeit:

$$a_0, a_1, \dots, a_k, \dots \text{ Dezimalbruchentwicklung von } b = \frac{z}{n}$$

$$\Rightarrow \text{Für alle } h \in \mathbb{N}_0 \text{ gilt: } \sum_{j=0}^h \frac{a_j}{10^j} \leq b < \sum_{j=0}^{h+1} \frac{a_j}{10^j} + \frac{1}{10^{h+1}}$$

Wir zeigen durch Induktion, dass für a_k kein Wahlmöglichkeit besteht:

$$\text{J.A. } a_0 \leq b < a_0 + 1 \Rightarrow a_0 n \leq z < a_0 n + n \Rightarrow z = a_0 n + z_0 \quad (z_0 < n)$$

$$\text{Eindeutig der Division mit Rest} \Rightarrow a_0 = \left\lfloor \frac{z}{n} \right\rfloor$$

$$\text{J.S. } \sum_{j=0}^{h+1} \frac{a_j}{10^j} \leq b < \sum_{j=0}^{h+1} \frac{a_j}{10^j} + \frac{1}{10^{h+1}}, \text{ setze } b_h = \sum_{j=0}^h \frac{a_j}{10^j}$$

$$\Rightarrow b_h + \frac{a_{h+1}}{10^{h+1}} \leq b < b_h + \frac{a_{h+1}}{10^{h+1}} + \frac{1}{10^{h+1}}$$

$$\Rightarrow a_{h+1} \leq 10^{h+1} (b - b_h) < a_{h+1} + 1$$

$$\Rightarrow a_{h+1} + 1 = \min \{ a \in \mathbb{N} : 10^{h+1} (b - b_h) < a \} \Rightarrow a_{h+1} \text{ eindeutig bestimmt}$$

□

Lemma: Ein Dezimalbruch mit Periodenlänge 1 und Periode 9 ist nicht Dezimalbruchentwicklung einer Bruchzahl

Beweis durch Widerspruch am Beispiel $0, \overline{9}$. Annahme

$$9 \cdot \sum_{j=1}^h \frac{1}{10^j} = \sum_{j=1}^h \frac{9}{10^j} \leq b < \sum_{j=1}^h \frac{9}{10^j} + \frac{1}{10^k} = 9 \cdot \sum_{j=1}^h \frac{1}{10^j} + \frac{1}{10^k} = 1$$

$$0 < 1 - b = 1 - \frac{z}{n} = \frac{n-z}{n} \leq \frac{1}{10^k} \quad \text{für alle } h!$$

$$0 < 10^k (n - z) \leq n \quad \text{für alle } h \xrightarrow[\text{nicht beschränkt}]{\text{folge } 10^k} \text{Widerspruch}$$

Satz:

Ein periodischer Dezimalbruch ist Dezimalbruchentwicklung einer Bruchzahl $b \in \mathbb{B}$ mit zwei Ausnahmen:

- 1.) die Periodenlänge ist 1 und die Periode 9
- 2.) $a_j = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$

Beweis:

für den Spezialfall $0, \overline{a_1 a_2 \dots a_p}$. Behauptung:

Dieser Dezimalbruch ist Entwicklung von $\frac{a_1 a_2 \dots a_p}{10^p - 1}$

$$a_1 a_2 \dots a_p = \sum_{j=1}^p a_j \cdot 10^{p-j} < 10^p$$

$$\text{nicht alle } a_j = 0 \Rightarrow \leq 10^{p-1}$$

$$\Rightarrow a_0 = 0; \quad a_1 a_2 \dots a_p = 0 \cdot (10^p - 1) + \underbrace{a_1 a_2 \dots a_p}_{z_0}$$

$$\begin{aligned} 10 z_0 &= \sum_{j=1}^p a_j 10^{p-j+1} = a_1 \cdot (10^p - 1) + a_2 a_3 \dots a_p a_1 \\ &= a_1 \cdot 10^p - a_1 \sum_{j=2}^p a_j \dots 10^{p-j+1} + a_1 \end{aligned}$$

$$10 z_1 = a_2 \cdot (10^p - 1) + a_3 a_4 \dots a_p a_1 a_2$$

□

Festsetzung $a_0, a_1, \dots, a_n \overline{9} = a_1, a_1, \dots, (a_{n+1})0 \dots$
 $a_n < 9$

$(\mathbb{B}, +)$ kommutative Halbgruppe mit Kürzungsregel
Erweiterung zu Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$, additive Gruppe der rationalen Zahlen

Darstellung: $[b_1, b_2]$

1. Fall: $b_1 > b_2$ $[b_1, b_2] = b_1 - b_2 \in \mathbb{B}$ positiv

$b_1 = b_2$ $[b_1, b_2] = 0$

$b_1 < b_2$ $[b_1, b_2] = -(b_2 - b_1)$ negativ

Bezeichnung und Definition: Für $\alpha \in \mathbb{Q}$ wird gesetzt

Betrag von α : $|\alpha| = \begin{cases} \alpha & \alpha \text{ positiv} \\ 0 & \alpha = 0 \\ -\alpha & \alpha \text{ negativ} \end{cases}$ $-(-b) = b$
 $b \in \mathbb{B}$

Das additive Inverse von $\alpha \in \mathbb{Q}$ heißt Gegenzahl zu α : $-\alpha$
Zahl und Gegenzahl haben gleichen Betrag. Die natürlichen Zahlen
zusammen mit der Null und ihren Gegenzahlen bilden die
Menge der ganzen Zahlen.