1. Staatsexamen LA RS (nicht vertieft) im Herbst 2005

Prüfungsfach: Analysis — Prüfer: Dr. Schörner (30 min)

Beisitzer:

- Was ist $3 \cdot 7$ - eine einfache 5. Klasse- Aufgabe?
  - → Am Anfang habe ich nicht gleich kapiert auf was der Zweitprüfer hinauswollte. Ich beantwortete mit 21, aber er meinte „Feiner Sand“. Anscheinend wollte der Beisitzer die Prüfungssituation auflockern, was er aber damit leider nicht geschafft hat.
- Warum gehört $\sqrt{2}$ nicht zur Menge Q?
  - → Annahme: $\sqrt{2} \in$ Q

    dann ist $\sqrt{2}$ als Bruch darstellbar $\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ (vollständig gekürzt!)

    $\Rightarrow \sqrt{2} \cdot q = p \Rightarrow 2 \cdot q^2 = p^2$ (*)$\Rightarrow p^2$ ist gerade $\Rightarrow p$ ist gerade $\Rightarrow p = 2c$

    $\Rightarrow$ einsetzen in (*) $\Rightarrow 2q^2 = 4c^2 \Rightarrow q^2 = 2c^2 \Rightarrow q^2$ ist gerade $\Rightarrow q$ ist gerade

    $\Rightarrow p$ und q besitzen den gemeinsamen Teiler 2 $\Rightarrow \frac{p}{q}$ nicht teilerfremd

    $\Rightarrow$ Widerspruch!!! $\Rightarrow \sqrt{2} \notin$ Q

Schörner:

- Was sind Gemeinsamkeiten und die Unterschiede zwischen Q und IR?
  - Es sind beides archimedisch angeordnete Körper
  - Unterschied: IR ist vollständig, Q nicht
  - Bsp.: Jede nicht leere, nach oben beschränkte Menge besitzt ein Supremum in IR aber nicht notwendigerweise in Q. Bsp.: $M := \left\{ \forall x \in Q \,\middle|\, x^2 \le 2 \right\}$ besitzt in IR ein Supremum aber nicht in Q.
- Wann konvergiert ein Folge?
  - Eine Folge konvergiert gegen einen Grenzwert a, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 \in IN$ gibt, so dass für alle $n \ge n_0$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$

    $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0 \in IN}{\exists}\ \underset{n \ge n_0}{\forall} : |a_n - a| < \varepsilon$
  - Graphisch versteht man darunter, dass ab einem bestimmten Folgenglied alle Folgenglieder einen beliebig kleinen Abstand zu einem Wert a annehmen können.
- Wenn man keinen Grenzwert hat, wie kann man dann feststellen, ob eine Folge konvergiert?
  - Wenn sie monoton ist und beschränkt ist, dann konvergiert sie.
  - Wenn sie eine Cauchy-Folge ist.
- Wie ist eine Cauchyfolge definiert?
  - $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{n_0 \in IN}{\exists}\ \underset{n,m \ge n_0}{\forall} : |a_n - a_m| < \varepsilon$
  - Das bedeutet anschaulich, dass alle Folgenglieder ab einem bestimmten n_0-ten Folgenglied beliebig nah beieinander liegen.
- Nennen Sie ein Beispiel für eine beschränkte und nicht monotone Folge!
  - $\frac{(-1)^n}{n}$

- <u>Welche Konvergenzkriterien für Reihen kennen Sie?</u>
  - Majorantenkriterium, Minorantenkriterium, Cauchy-Konvergenz-Kriterium, Quotientenkriterium, Wurzelkriterium, Leibnizkriterium
- <u>Suchen Sie sich ein Kriterium heraus und gehen Sie näher darauf ein.</u>
  - Quotientenkriterium

    $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{x_{k+1}}{x_k}\right|$ <1 Reihe x_k ist absolut konvergent

    >1 Reihe x_k ist divergent

- <u>Nennen Sie drei typisch konvergente Reihen.</u>
  - Exponentialfunktion $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$
  - Geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ mit $|x|<1$
  - $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$
- <u>Wann ist eine Funktion stetig?</u>
  - f ist stetig, wenn sie in jedem Punkt a stetig ist
  - f ist stetig im Punkt a, wenn das $\varepsilon-\delta$-Kriterium erfüllt ist:

    Für jedes (noch so kleine) $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D$ mit $|x-a| < \delta$ stets $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ gilt.
  - Anschaulich: Die Funktion macht keinen Sprung, man kann sie also in einem durchziehen. (→ Graphik siehe Skript)
- <u>Welche Möglichkeiten hat man, wenn man eine stetige Funktion hat?</u>
  - Sie ist integrierbar.
  - Wenn eine Funktion auf einem geschlossenen Intervall definiert ist uns stetig ist, nimmt sie ein Minimum und Maximum an. → Satz von Weierstrass
  - Der Nullstellensatz gilt:

    Sei $f:[a;b] \to IR$ eine stetige Funktion mit $f(a)\cdot f(b) < 0$, dann existiert ein $\xi \in]a,b[$ mit $f(\xi) = 0$. (→ Grafik siehe Skript)
  - Der Zwischenwertsatz gilt:

    Sei $f:[a;b] \to IR$ eine stetige Funktion und sei $c \in IR$ zwischen *f(a)* und *f(b)*. Dann gibt es ein $\xi \in]a,b[$ mit $f(\xi) = c$. (→ Grafik siehe Skript)
- <u>Wann ist eine Funktion differenzierbar?</u>
  - Eine Funktion heißt im Punkt a differenzierbar, wenn $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existiert.
  - Eine Funktion heißt differenzierbar, wenn sie in jedem Punkt a aus ihrem Definitionsbereich differenzierbar ist.
- <u>Welcher Satz ist bei einer differenzierbaren Funktion gültig?</u>
  - Mittelwertsatz:

    Sei $f:[a;b] \to IR$ stetig und in jedem $x \in]a,b[$ diffbar.

    1. Es gibt ein x_0 mit $x_0 \in]a,b[$ mit $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
    2. Ist auch $g:[a;b] \to IR$ stetig und in jedem $x \in]a,b[$ diffbar, so gibt es ein $x_0 \in]a,b[$ mit $(f(b)-f(a))g'(x_0) = (g(b)-g(a))f'(x_0)$

- Anschaulich: Die Steigung der Sekante durch die Punkte *(a,f(a))* und *(b,f(b))* ist gleich der Steigung der Tangente an den Graphen von f an einer gewissen Zwischenstelle $(x_0,f(x_0))$ (→Grafik siehe Skript)

- Erklären Sie mir den Zusammenhang zwischen Differenzierbarkeit und Stetigkeit!
  - Jede differenzierbare Funktion ist stetig.
  - Nicht jede stetige Funktion ist differenzierbar, z.B. Betragsfunktion.
- Wie ist die Ableitung im Mehrdimensionalen definiert?
  - Partielle Differenzierbarkeit
  - Eine Funktion heißt partiell differenzierbar, nach der ersten Variablen x, wenn $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$ existiert.
- Für was braucht man das?
  - Um die kritischen Stellen zu berechnen.
  - Man setzt den Gradienten (der aus der partiellen Ableitung besteht) gleich Null.
- Was ist die Hesse-Matrix? (Definition der Hessematrix im Zweidimensionalen)
- Warum ist sie symmetrisch?
  - Nach dem Satz von Schwarz ist es egal nach welcher Variablen man zuerst ableitet.
- Wie findet man die Extremwerte?
  - Man setzt die kritischen Punkte in die Hessematrix ein. Ist sie positiv definit, so liegt ein Minimum vor, ist sie negativ definit, so liegt ein Maximum vor, ist sie indefinit, so liegt ein Sattelpunkt vor.
  - Eine Matrix heißt positiv definit, wenn sie nur positive (von Null verschiedene) Eigenwerte besitzt, sie heißt negativ definit, wenn sie nur negative (von Null verschiedene) EW besitzt, und indefinit, wenn sie positive und negative EW besitzt.
  - Besitzt die Hessematrix einen EW, der Null ist, muss dieser Fall gesondert untersucht werden.
- Ist ein Sattelpunkt ein Extremum?
  - Nein, da es in seiner Umgebung sowohl Werte gibt, die größer als auch kleiner sind.

- Was entspricht dem Gradienten und der Hessematrix im Eindimensionalen?
  - Gradient → 1. Ableitung
  - Hessematrix → 2. Ableitung

Kommentar:
Herr Schörner legt viel Wert auf Verständnis, Zusammenhänge und die Graphiken zu den jeweiligen Definitionen. Er hilft einem weiter, wenn man hängt bzw. erklärt es einem, wenn man etwas nicht verstanden hat. Er legte auch viel Wert auf die Formelsprache.
Bei dieser Prüfung war leider der Zweitprüfer etwas schwierig. Er redete immer dazwischen, wenn man auch gerade am überlegen war, und hat einen eher verwirrt.
Die Benotung erschien mir nicht ganz gerechtfertigt, aber trotzdem ok.
Herr Schörner ist als Prüfer aber sehr zu empfehlen. Er versuchte, soweit es der Zweitprüfer zuließ, eine angenehme Prüfungsatmosphäre zu schaffen.