30.05.06

3. Kongruenzabbildungen

2.9. Definition

1.) Seien $X = t + U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $X' = t' + U' \subseteq \mathbb{R}^m$ affine Teilmengen. Eine <u>Affinität</u> $f: X \to X'$ heißt <u>Kongruenzabbildung</u> oder Bewegung, wenn $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$ für alle $x, y \in X$ gilt. Mit $f(t+u) = f(t) + f(u)$ für alle $u \in U$, wobei $f: U \to U'$ ein Vektorraumisomorphismus ist, gilt dann wegen

$$* \; d(f(x), f(y)) = \| f(x) - f(y) \| = \| (f(t) + \varphi(u)) - (f(t) + \varphi(u)) \|$$
$$= \| \varphi(u - v) \|$$

$$* \; d(x, y) = \| x - y \| = \| (t+u) - (t+v) \| = \| u - v \|$$

daß f genau dann eine Bewegung ist, wenn f eine orthogonale Abbildung ist. Als längentreue Abbildung ist f dann insbesondere auch winkeltreu, es ist also

$$\sphericalangle(f(x), f(y), f(z)) = \sphericalangle(x, y, z) \quad \text{für alle } x \neq y \neq z.$$

2.) Eine affine Abbildung $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = b + A \cdot x$ ist genau dann eine Bewegung, wenn $\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| =$
$= \| (b + Ax) - (b + Ay) \| = \| A(x-y) \|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist, also wenn $A \in O_n(\mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix ist, d.h.

* Die Spalten von A bilden ein Orthonormalsystem $\mathbb{R}^n$
* Die Zeilen von A bilden ein " von $\mathbb{R}^n$
* $A^T \cdot A = E_n = A \cdot A^T$ bzw. $A^{-1} = A^T$

2.10 Erinnerung

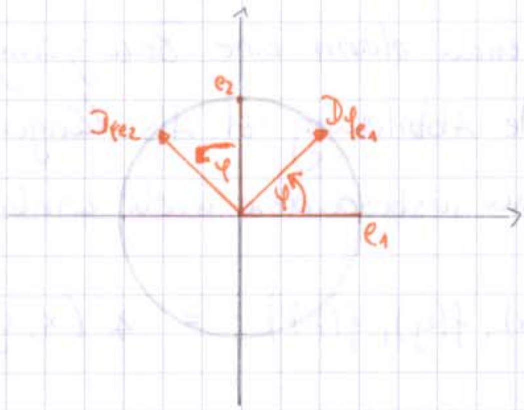
Die orthogonale Gruppe $O_2(\mathbb{R})$ besteht

a) aus den Determinanten $D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ mit $\varphi \in [0, 2\pi[$

b) aus den Spiegelungsmatrizen $S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ mit $\varphi \in [0, 2\pi[$

Dabei gilt:

1.) Die orthogonale Abbildung $d_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $d_\varphi(x) = D_\varphi \cdot x$, beschreibt die Drehung um den Ursprung mit dem Drehwinkel φ; für $\varphi = 0$ ist d_φ die identische Abbildung, für $\varphi = \pi$ die Punktspiegelung am Ursprung



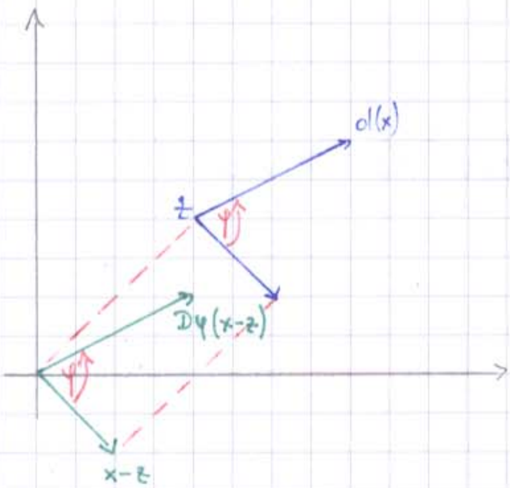
Wegen $\det D_\varphi = 1$ ist d_φ orientierungstreu aber für $\varphi \neq 0, \pi$ nicht diagonalisierbar.

2.) Die orthogonale Abbildung $s_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $s_\varphi(x) = S_\varphi \cdot x$ beschreibt die Achsenspiegelung an der Spiegelachse.
$\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi/2 \\ \sin \varphi/2 \end{pmatrix}$

Wegen $\det S_\varphi = -1$ ist s_φ orientierungsumdrehend, sie ist diagonalisierbar mit $\mathrm{Eig}(s_\varphi, 1) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} \cos \varphi/2 \\ \sin \varphi/2 \end{pmatrix}$ und $\mathrm{Eig}(s_\varphi, -1) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos \varphi/2 \end{pmatrix}$

2.11. Bemerkung (Drehung in $\mathbb{R}^2$)

1.) Sei $d: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Drehung mit dem Drehzentrum $z \in \mathbb{R}^2$ und dem Drehwinkel $\varphi \in [0, 2\pi[$. Durch Parallelverschiebung der Punkte m, x und $d(x)$ längs des Vektors $-z$ in die Punkte 0, $x-z$ und $d(x)-z = D_\varphi(x-z)$ ergibt sich $\boxed{d(x) = z + D_\varphi(x-z)}$



Damit ist $d: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wegen $d(x) = (z - D_\varphi z) + D_\varphi x$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ eine Bewegung mit $A = D_\varphi$ und $b = z - D_\varphi z = (E - D_\varphi) z$

2.) Sei nun umgekehrt $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = b + A \cdot x$ eine Bewegung mit $A = D_\varphi$.

a) Für $\varphi = 0$ ist $D_\varphi = E$ und damit f die Translation (Parallelverschiebung) um den Vektor b.

b) Für $\varphi \neq 0$ ist $\det(E - D_\varphi) = \begin{vmatrix} 1-\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & 1-\cos\varphi \end{vmatrix} =$

$$= (1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi > 0$$

also $E - D_\varphi$ invertierbar, und es gibt ein $z = (E - D_\varphi)^{-1} \cdot b \in \mathbb{R}^2$.
Wegen $f(x) = b + D_\varphi x = (E - D_\varphi) z + D_\varphi x = z + D_\varphi(x - z)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ ist f die Drehung um den Mittelpunkt z mit Winkel φ.

2.12. Bemerkung (Spiegelung in $\mathbb{R}^2$)

1.) Sei $s: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die Achsenspiegelung mit der Spiegelachse $t + \mathbb{R}\cdot u$, wobei $t \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Trägerpunkt und $u = \begin{pmatrix} \cos \varphi/2 \\ \sin \varphi/2 \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor sei.

fehlt leider noch