Ferner gilt für das Volumen des Tetraeders mit den Ecken

$a, a+u, a+v, a+w$: $V = 1/6\,|\det(u,v,w)|$

23.05.06

§ 2 Geometrische Abbildungen

A. Affine Abbildung

2.1. Bemerkung

1.) Projiziert man den Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ längs des Vektors $v = \binom{2}{1} \in \mathbb{R}^2$ auf die Gerade $g = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 = 1\} = \binom{1}{0} + \mathbb{R} \cdot \binom{1}{1}$, so ergibt sich für den Bildpunkt

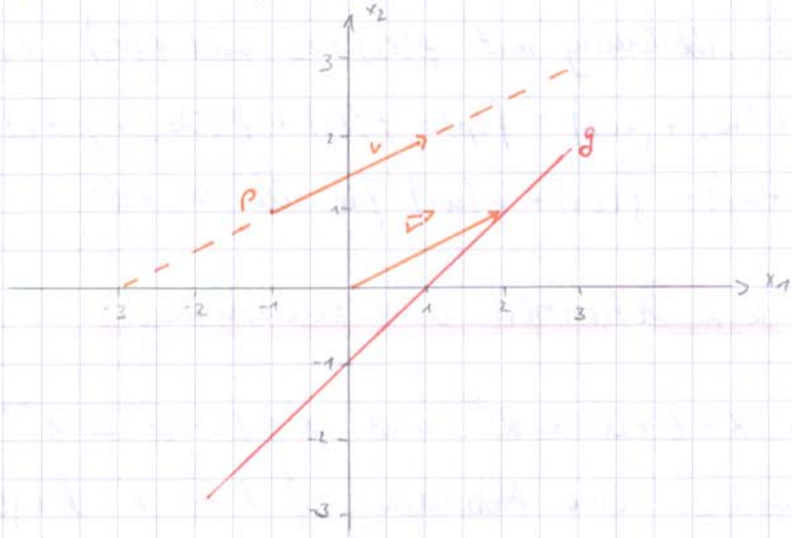
$f(p) = p + \lambda v = \begin{pmatrix} p_1 + 2\lambda \\ p_2 + \lambda \end{pmatrix}$ für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$

wegen $f(p) \in g$ dann $(p_1 + 2\lambda) - (p_2 + \lambda) = 1$, also

$\lambda = 1 - p_1 + p_2$ und damit $f(p) = \begin{pmatrix} 2 - p_1 + 2p_2 \\ 1 - p_1 + 2p_2 \end{pmatrix} = \binom{2}{1} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} p$

Für die Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gilt also $f(x) = b + A \cdot x$ mit

$b = \binom{2}{1}$ und $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$



Aufgrund der Konstruktion ergibt sich:

a) Das Bild von f, also die Menge aller Bildpunkte $f(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^2$, stimmt mit der Geraden g überein; sie ist genauer die Menge der Fixpunkte von f.

b) Das Urbild des Punktes $q = \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ der Geraden g unter f, also die Menge aller $x \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = q$ ist genau die Gerade $q + \mathbb{R} \cdot v = \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot v$

2.) Sei f die Projektion von der Ebene

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = -1\} = t_1 + U_1$$

mit $t_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $U_1 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ längs des Vektors $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ auf die Ebene

$$F = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = -1\} = t_2 + U_2$$

mit $t_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $U_2 = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Für $p = t_1 + \lambda e_2 + \mu e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in E$ ergibt sich dabei $f(p) = p + \tau v = \begin{pmatrix} -1 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ für ein geeignetes $\tau \in \mathbb{R}$, und wegen $f(p) \in F$ gilt $\mu - \tau = -1$, also $\tau = \mu + 1$, und damit $f(p) = \begin{pmatrix} \mu \\ 2 + \lambda + 2\mu \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $= f(t_1) + \lambda e_2 + \mu(e_1 + 2e_2)$. Bezeichnet $\varphi: U_1 \to U_2$ die lineare Abbildung mit $\varphi(e_2) = e_2$ und $\varphi(e_3) = e_1 + 2e_2$, so ist $f(t_1 + \lambda e_2 + \mu e_3) = f(p) = f(t_1) + \varphi(\lambda e_2 + \mu e_3)$, also $f(t_1 + u_1) = f(t_1) + \varphi(u_1)$ für alle $u_1 \in U$

2.2 Definition und Bemerkung

1.) Seien $X = t + U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $X' = t' + U' \subseteq \mathbb{R}^m$ affine Teilmengen. Eine Abbildung $f: X \to X'$ heißt affin, wenn es ein $x_0 \in X$ und eine lineare Abbildung $\varphi: U \to U'$ gibt, so daß $\boxed{f(x_0 + u) = f(x_0) + \varphi(u)}$ für alle $u \in U$ gilt.

2) In diesem Fall gilt dann für jedes $x_1 \in X$ dann

$$f(x_1+u) = f(x_0 + (x_1 - x_0) + u)$$
$$\overset{1)}{=} f(x_0) + \varphi((x_1-x_0)+u)$$
$$\overset{\varphi \text{ lin.}}{=} f(x_0) + \varphi(x_1-x_0) + \varphi(u)$$
$$\overset{1)}{=} f(x_0 + (x_1-x_0)) + \varphi(u)$$
$$= f(x_1) + \varphi(u)$$

für alle $u \in U$; die Definition ist also vom gewählten Trägerpunkt unabhängig und es ist

$$f(t+u) = f(t) + \varphi(u) \text{ für alle } u \in U.$$

3.) Für $X = \mathbb{R}^n$ und $X' = \mathbb{R}^m$ ist etwa $t=0$ und $t'=0$ sowie $U = \mathbb{R}^n$ und $U' = \mathbb{R}^m$. Dann ist eine Abbildung $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ genau dann affin, wenn es ein $b \in \mathbb{R}^m$ und eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gibt, so daß $f(x) = b + A\cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

2.3 Beispiele

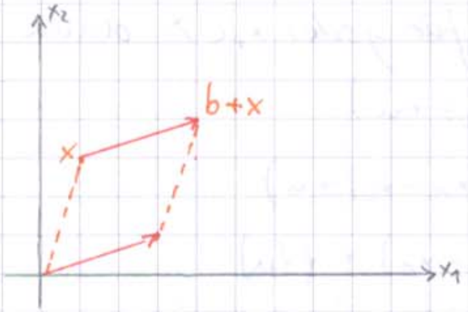
1.) Seien $b, z \in \mathbb{R}^n$ sowie $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

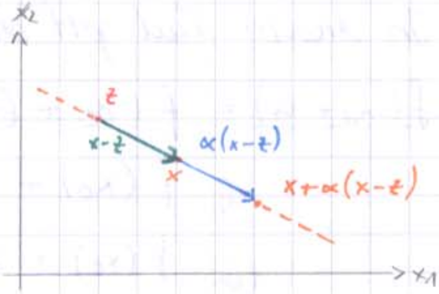
a) Die Abbildung $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = b$, ist affin; hier ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Nullmatrix

b) Die lineare Abbildung $f = \ell_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, ist insbesondere eine affine Abbildung (mit $b=0$)

c) Die Translation (Parallelverschiebung) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = x + b$, ist affin; hier ist $A = E_n$ die Einheitsmatrix

d) Für die zentrische Streckung f mit dem Zentrum z und den Streckungsfaktor α gilt $f(x) = z + \alpha(x-z) = (1-\alpha)z + \alpha\cdot x$ eine affine Abbildung mit $b = (1-\alpha)z$ und $A = \alpha \cdot E_n$





2.) Sei $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x) = b + Ax$, mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 7 & 5 \\ -2 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$
und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

* Wegen $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 7 & 5 \\ -2 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$ ist $r = \text{Rang}(A) = 2$.

Bild (l_A) ist der Spaltenraum von A; da x_1 und x_3 die gebundenen Variablen von $A' \cdot x = 0$ sind, bilden $s_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $s_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des Spaltenraums von A' und folglich $s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $s_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ eine Basis von Bild (l_A). Damit ist Bild (f) die affine Ebene $b + \mathbb{R}s_1 + \mathbb{R}s_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

* Damit gilt $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \in \text{Bild}(f)$
das Urbild $f^{-1}(y)$ besteht aus allen $x \in \mathbb{R}^4$ mit $f(x) = y$, also mit $y = b + A\cdot x$ und stimmt daher mit der Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems.
$A \cdot x = y - b$, wegen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 7 & 5 & 3 \\ -2 & 4 & 5 & 7 & 9 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 11 & 11 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ ist}$$

x_2 frei x_4

$$f^{-1}(y) = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{part. Lsg} \\ \text{von } A\cdot x = y-b}} + \underbrace{\mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Lösungsraum } L_0 \text{ von } Ax=0 \\ = \ker(\ell_A)}}$$

2.4. Bemerkung

Seien $X = t + U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $X' = t' + U' \subseteq \mathbb{R}^m$ affine Teilmengen sowie $f: X \longrightarrow X'$ eine affine Abbildung mit $f(t+u) = f(t) + \varphi(u)$ für alle $u \in U$. Dann gilt:

1.) Ist $X_0 = t_0 + U_0 \subseteq X$ eine affine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, so ist $f(X_0) = f(t_0) + \varphi(U_0)$ eine affine Teilmenge von $\mathbb{R}^m$, insbesondere bildet f parallele affine Teilmengen von X auf parallele affine Teilmengen von X' ab.

2.) Ist $X'' = t'' + U'' \subseteq \mathbb{R}^p$ eine affine Teilmenge sowie $g: X' \longrightarrow X''$ eine affine Abbildung mit $g(t'+u') = g(t') + \psi(u')$ für alle $u' \in U'$, so ist $g \circ f: X \longrightarrow X''$ wegen $(g\circ f)(t+u) = g(f(t+u)) \underset{f \text{ affin}}{=} g(\underbrace{f(t)}_{\in X'} + \underbrace{\varphi(u)}_{\in U'}) \underset{g \text{ affin}}{=} g(f(t)) + \psi(\varphi(u)) = (g\circ f)(t) + (\psi\circ\varphi)(u)$ eine affine Abbildung. Speziell für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = A\cdot x + b$ und $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, $g(x) = c + Bx$ ergibt sich $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(b + A\cdot x) = c + B(b + A\cdot x) = (c + Bb) + B\cdot Ax$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{3 a)} & f \text{ injektiv} \iff \varphi \text{ injektiv} \\ \text{b)} & f \text{ surjektiv} \iff \varphi \text{ surjektiv} \end{array}}$$

4.) Aus 3a) und b) folgt $\underline{f \text{ bijektiv} \Leftrightarrow \varphi \text{ bijektiv}}$, in diesem Fall ist $f^{-1}: X' \to X$ ebenfalls eine affine Abbildung mit

$\boxed{f^{-1}(t'+u') = f^{-1}(t') + \varphi^{-1}(u')}$ es ist nämlich

$$f(f^{-1}(t') + \varphi^{-1}(u')) \underset{f \text{ affin}}{=} f(f^{-1}(t')) + \varphi(\varphi^{-1}(u')) = t'+u';$$

f und f' heißen Affinitäten.

5.) Aus 3.) und 4.) ergibt sich speziell für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = b + A \cdot x$

a) f injektiv $\Leftrightarrow$ l_A injektiv $\Leftrightarrow$ Rang $(A) = n$ $\quad \begin{pmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \\ & & \end{pmatrix} \; r = n$

b) f surjektiv $\Leftrightarrow$ l_A surjektiv $\Leftrightarrow$ Rang $(A) = m$ $\quad \begin{pmatrix} * & & & & \\ & * & & & \\ & & & & * \end{pmatrix} \; r = m$

c) f bijektiv $\Leftrightarrow$ l_A bijektiv $\Leftrightarrow$ Rang $(A) = m = n$ $\quad \begin{pmatrix} * & & & \\ & * & & \\ & & * & \\ & & & * \end{pmatrix} \; r = m = n$

$$\text{Wegen } y = f(x) = b + A \cdot x \Leftrightarrow A \cdot x = y - b \Leftrightarrow x = A^{-1}(Ax)$$
$$= A^{-1}(y-b)$$
$$= -A^{-1}b + A^{-1}y$$

2.5. Erinnerung

1.) Prinzip der linearen Fortsetzung

Seien V und W reelle Vektorräume sowie $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V; ferner seien $w_1, \dots, w_n$ beliebige Vektoren aus W.

$$\begin{array}{ccccc} V & & b_1 & \dots & b_n \\ f \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ W & & w_1 & \dots & w_n \end{array}$$

Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $f: V \to W$ mit $f(b_1) = w_1, \dots, f(b_n) = w_n$

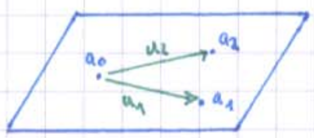
2.) Sei nun speziell $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$; für die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt es genau eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $f(x) = A \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Damit gilt $A \cdot b_1 = f(b_1) = w_1, \ldots, A \cdot b_n = f(b_n) = w_n$, zusammen $A \cdot (b_1, \ldots, b_n) = (w_1, \ldots, w_n)$. Da $b_1, \ldots, b_n$ als Basis von $\mathbb{R}^n$ vorausgesetzt sind, ist die Matrix $B = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar, und mit $C = (w_1 \ldots w_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ erhält man $A \cdot B = C$ oder $A = C \cdot B^{-1}$.

3.) Sei etwa $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sowie $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, also $B = (b_1, b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ sowie $C = (w_1, w_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$. Wegen $\det(B) = -3 \neq 0$ ist $B \in GL_2(\mathbb{R})$ mit $B^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, also b_1, b_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$, und für die Matrix der linearen Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $f(b_1) = w_1$; $f(b_2) = w_2$ gilt

$$A = C \cdot B^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -2 & -2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 & -1/3 \\ 2/3 & 2/3 \\ -1/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

2.6 Definition und Bemerkung

1a) Die von den Punkten $a_0, a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}^n$ aufgespannte affine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $X = t + U$ mit dem Trägerpunkt $t = a_0$ und dem Richtungsraum $U = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$ mit $u_1 = a_1 - a_0, \ldots, u_r = a_r - a_0$.



$X = a_0 + \mathbb{R}u_1 + \mathbb{R}u_2$

Damit ist:

$$X = \{a_0 + \lambda_1(a_1 - a_0) + \ldots + \lambda_r(a_r - a_0) \mid \lambda_1 \ldots \lambda_r \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{(1 - \lambda_1 - \ldots - \lambda_r) \cdot a_0 + \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_r a_r \mid \lambda_1 \ldots \lambda_r \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_r a_r \mid \lambda_0, \lambda_1 \ldots \lambda_r \in \mathbb{R} \text{ mit } \lambda_0 + \ldots + \lambda_r = 1\}$$

nennt man die <u>affine Hülle</u> $[a_0, a_1, \ldots, a_r]$ von $a_0, a_1, \ldots, a_r$

2.) Die Punkte $a_0, a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}^m$ heißen affin unabhängig, wenn $\dim [a_0, a_1, \dots, a_r] = r$ ist, d.h. wenn die Richtungsvektoren $u_1 = a_1 - a_0, \dots, u_r = a_r - a_0$ linear unabhängig und damit eine Basis von U sind. In diesem Fall besitzt jeder Punkt $x \in [a_0, a_1, \dots, a_r]$ eine eindeutige Darstellung

$$x = a_0 + \lambda_1 \underbrace{(a_1 - a_0)}_{u_1} + \dots + \lambda_r \underbrace{(a_r - a_0)}_{u_r}$$

und wir nennen $a_0; a_1, \dots, a_r$ bzw. $a_0; u_1, \dots, u_r$ ein affines Koordinatensystem von $X = [a_0; a_1, \dots, a_r]$ mit dem