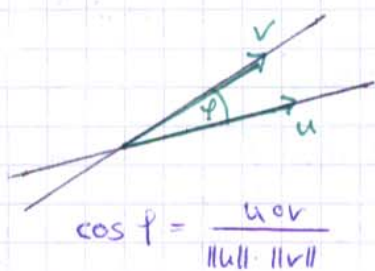


$$= \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{3} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$$

95.06

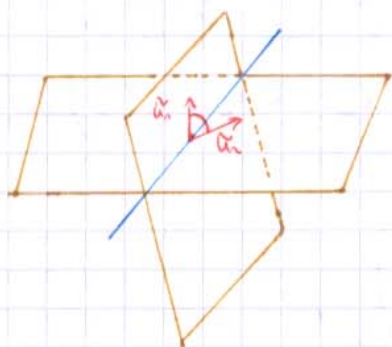
1.14 Definition

Seien $g_1 = t_1 + \mathbb{R}u_1$ und $g_2 = t_2 + \mathbb{R}u_2$ zwei Geraden sowie X_1 und X_2 zwei Hyperebenen mit Normalenvektoren $\tilde{u}_1$ und $\tilde{u}_2$ in $\mathbb{R}^n$. Dann heißt $\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$ mit



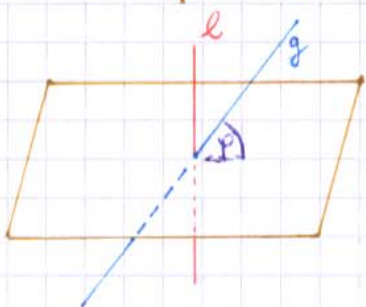
a) $\cos \varphi = \left| \frac{u_1 \circ u_2}{\|u_1\| \cdot \|u_2\|} \right|$ Winkel φ (g_1, g_2)
zwischen den Geraden g_1 und g_2 .

b) $\cos \varphi = \left| \frac{\tilde{u}_1 \circ \tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_1\| \cdot \|\tilde{u}_2\|} \right|$ Winkel φ (X_1, X_2)
zwischen den Hyperebenen X_1 und X_2 .



c) $\varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi(g_1, l)$ der Winkel
zwischen g_1 und X_1 .

es ist $\sin \varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi(g_1, l)\right)$
 $= \cos \varphi(g_1, l)$
 $= \left| \frac{u_1 \circ \tilde{u}_1}{\|u_1\| \cdot \|\tilde{u}_1\|} \right|$



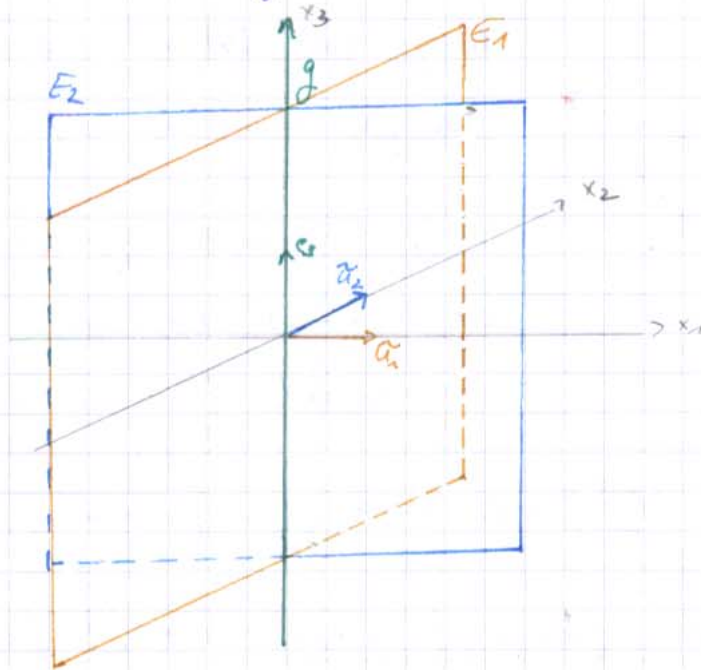
1.15 Beispiele

1.) Die Geraden $g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_1}$ und $g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{u_2}$

mit den Richtungsvektoren $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ schließen
 ein Winkel φ mit $\cos \varphi = \left| \frac{u_1 \circ u_2}{\|u_1\| \cdot \|u_2\|} \right| = \left| \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{3}$,

also $\varphi = \frac{\pi}{6}$, ein.

- 2.) Die Koordinatenebenen $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\}$ ($x_2 x_3$ -Ebene) und $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\}$ ($x_1 x_3$ -Ebene) mit den Normalenvektoren $\tilde{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\tilde{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ schließen wegen $\tilde{u}_1 \cdot \tilde{u}_2 = 0$ ein Winkel φ mit $\cos \varphi = \frac{|\tilde{u}_1 \cdot \tilde{u}_2|}{\|\tilde{u}_1\| \cdot \|\tilde{u}_2\|} = 0$, also $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ein. Sie schneiden sich in der x_3 -Achse $g = \mathbb{R} \cdot e_3$ und besitzen daher den gemeinsamen Richtungsvektor e_3 , und wegen $e_3 \notin E_1$ ist $E_1 \neq E_2$.



- 3.) Die Gerade $g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und die Ebene $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 = -4\}$ schneiden sich im Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ unter einem Winkel φ mit

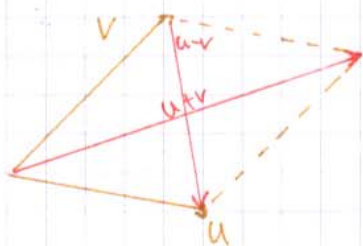
$$\sin \varphi = \frac{|u \cdot \tilde{u}|}{\|u\| \cdot \|\tilde{u}\|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{|-25|}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{50}} = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2},$$

also $\varphi = \frac{\pi}{6}$

C. Geometrische Örter

1.16. Bemerkung

Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a \neq b$; gesucht ist der geometrische Ort X aller Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ mit $d(x, a) = d(x, b)$



Wegen $\|u\| = \|v\| \Leftrightarrow u-v \perp u+v$

für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$d(x, a) = d(x, b) \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \|x-a\| = \|x-b\|$$

$$\Leftrightarrow (x-a) - (x-b) \perp (x-a) + (x-b)$$

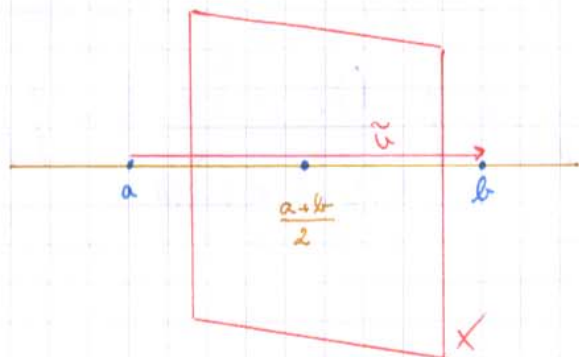
$$\Leftrightarrow b-a \perp \underbrace{(2x - (a+b))}_{2 \cdot (x - \frac{a+b}{2})} \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow}$$

$$(b-a) \circ (x - \frac{a+b}{2}) = 0 \Leftrightarrow (b-a) \circ x = (b-a) \circ \frac{a+b}{2},$$

Damit ist

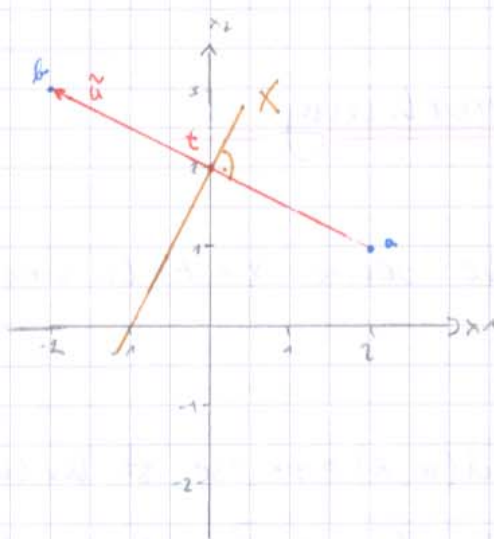
$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, a) = d(x, b)\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{(b-a)}_{\tilde{u}} \circ x = \underbrace{(b-a) \circ \frac{a+b}{2}}_{\tilde{t}}\}$$

eine Hyperebene mit dem Normalenvektor $\tilde{u} = b-a$ und dem Trägerpunkt $\frac{a+b}{2}$,



1.) Für $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist $\tilde{u} = b-a = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\tilde{t} = \frac{b+a}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und damit

$$X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \tilde{u} \circ x = \tilde{u} \circ \tilde{t}\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -4x_1 + 2x_2 = 4\} \\ = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 - x_2 + 2 = 0\}$$



2.) Für $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist $\tilde{a} = b - a = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und

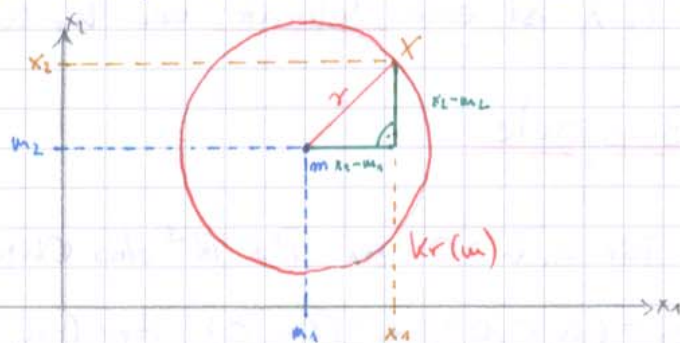
$$t = \frac{a+b}{2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und damit}$$

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \tilde{a} \cdot x = \tilde{a} \cdot t \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 18 \right\} \\ = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 9 \right\}$$

1.17. Definition

Seien $m \in \mathbb{R}^n$ sowie $r \in \mathbb{R}^+$; der geometrische Ort aller Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ mit $d(x, m) = r$ heißt Sphäre $K_r(m) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - m\| = r \}$ mit Mittelpunkt m und Radius r .

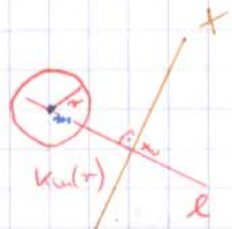
a) Für $n=2$ ist $K_r(m) = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - m\|^2 = r^2 \} = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2 \}$ der Kreis mit Mittelpunkt m und Radius r .



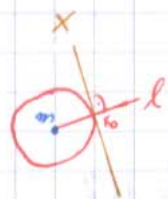
b) Für $n=3$ ist $K_r(m) = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - m\|^2 = r^2 \} = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2 \}$ die Kugel mit Mittelpunkt m zum Radius r .

1.18. Bemerkung

Sei $K_r(m)$ eine Sphäre sowie $X = t + U$ eine affine Teilmenge mit $\dim U \geq 1$ in $\mathbb{R}^n$.



- 1.) Ist $d(m, X) > r$, so ist $K_r(m) \cap X = \emptyset$
("X ist eine Passante von $K_r(m)$ ")



- 2.) Ist $d(m, X) = r$, so gilt für den Lotfußpunkt $x_0 \in X$ von m auf X gerade $d(m, x_0) = d(m, X) = r$, für alle $x \in X$ mit $x \neq x_0$ ist $d(x, m) > r$.

Damit ist $K_r(m) \cap X = \{x_0\}$, X berührt $K_r(m)$ im Punkt x_0

("X ist eine Tangente von $K_r(m)$ ")

- 3.) Ist $d(m, X) < r$, so schneidet jede Gerade $x_0 + \mathbb{R}u \subseteq X$ die Sphäre in genau zwei Punkten $x_0 + \lambda u$ mit

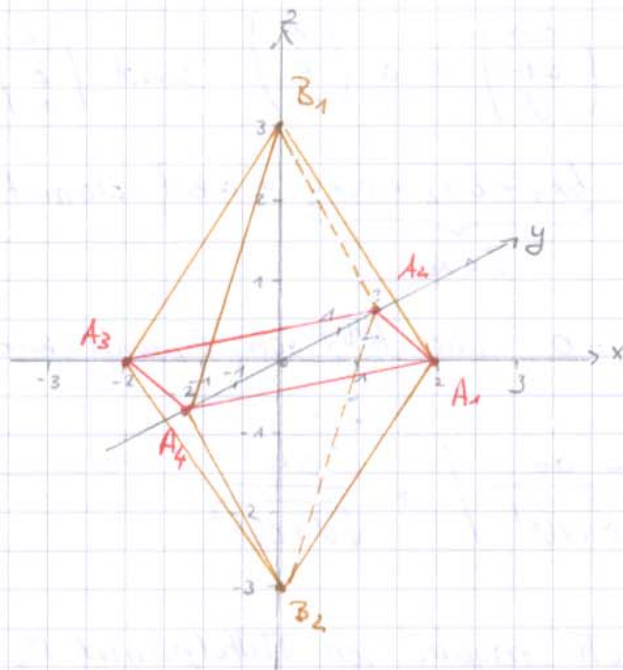
$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{r^2 - d(m, x_0)^2}}{\|u\|}$$

("X ist eine Sekante von $K_r(m)$ ")

1.19 Beispiele

- 1.) (TOS II 2) Für $a, b > 0$ sei $P \subseteq \mathbb{R}^3$ das Octaeder mit den Ecken $A_1 = (a, 0, 0)$, $A_2 = (0, a, 0)$, $A_3 = (-a, 0, 0)$, $A_4 = (0, -a, 0)$, $B_1 = (0, 0, b)$ und $B_2 = (0, 0, -b)$

a) Man skizziere das Octaeder P für $a=2$ und $b=3$.



b) Man bestimme Mittelpunkt M_1 und Radius r_1 (in Abhängigkeit von a und b) der Inkugel Σ_1 , also der Kugel, welche alle acht Seitenebenen (Facettenebenen) berührt.

Zu bestimmen ist also derjenige Punkt $M_1 \in \mathbb{R}^3$, der zu jeder der acht Seitenebenen denselben Abstand r_1 besitzt.

Aufgrund der Symmetrieeigenschaft von P wählen wir $M_1 = 0$, und bestimmen seinen Abstand etwa von der Seitenebene $A_1 A_2 B$.

16.05.06

Der Mittelpunkt M_1 besitzt von allen acht Seitenebenen denselben Abstand, aufgrund der Symmetrieeigenschaften von P ist also M_1 der Nullpunkt $(0,0,0)$.

Für die Ebene E durch die Eckpunkte A_1, A_2, B gilt

$$E = \left(\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \right),$$