nichtparallele Geraden in der Ebene E_i sind, besitzen sie einen Schnittpunkt, nämlich $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix}5\\-4\\5\end{pmatrix}$.

B. Abstand und Winkel

1.8 Definition und Bemerkung

1.) Für zwei Punkte $a, b \in \mathbb{R}^n$ heißt $d(a,b) := \|b-a\|$ der Abstand von a und b.

2.) Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ gilt:

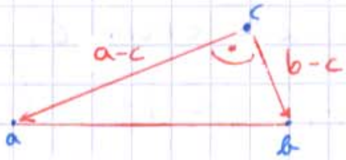
a) $d(a,b) = 0 \iff a = b$

b) $d(a,b) = d(b,a)$

c) $d(a,b) \leq d(a,c) + d(b,c)$ (Dreiecksungleichung)

d) $a-c \perp b-c \iff d(a,b)^2 = d(a,c)^2 + d(b,c)^2$

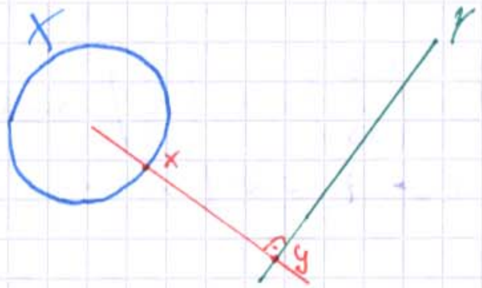
(Satz von Pythagoras)



3.) Seien X, Y nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$d(X,Y) = \inf \{ d(x,y) \mid x \in X, y \in Y \}$$

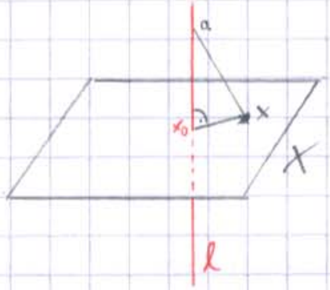
der Abstand von X und Y.



1.9 Satz

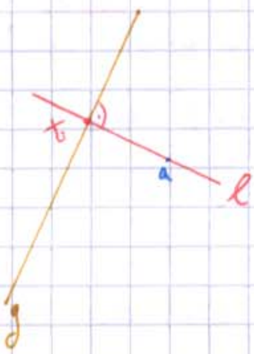
Sei $X = t + U$ eine affine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es genau einen Punkt $x_0 \in X$ mit $x_0 - a \perp U$, und es gilt $d(a, X) = d(a, x_0)$. Man nennt die

Verbindungsgerade ℓ von a und x_0 die Lotgerade von a auf X und x_0 den Lotfußpunkt von ℓ in X.



1.10 Beispiele

1.) Sei $g = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$



a) Für den Lotfußpunkt $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist $x_0 - a = \begin{pmatrix} -1 + \lambda \\ 4 + 2\lambda \\ 1 + 2\lambda \end{pmatrix}$ und damit $(x_0 - a) \circ u =$

$= -1 + \lambda + 8 + 4\lambda + 2 + 4\lambda = 9 + 9\lambda = 0$, also

$\lambda = -1$ und folglich $x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) Alternativ läßt sich auch die Lotebene L zu g durch a betrachten. Es ist $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{x_1 + 2x_2 + 2x_3}_{u \circ x} - \underbrace{3}_{u \circ a} = 0\}$

und für $x_0 = t + \lambda u \in g \cap L$ gilt:

$\lambda + 2(6 + 2\lambda) + 2 \cdot 2\lambda - 3 = 9\lambda + 9 \overset{!}{=} 0$, also $\lambda = -1$,

womit $x_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Damit ergibt sich $d(a, g) = d(a, x_0) = \|x_0 - a\| = \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = 3$

2.) Sei $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 3 = 0\}$ und $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit ist $\ell = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$ die Lotgerade zu E durch a, und für den Lotfußpunkt $x_0 = \begin{pmatrix} 1 + 4\lambda \\ -1 - 7\lambda \\ 1 + 4\lambda \end{pmatrix} \in \ell \cap E$ gilt

$4(1 + 4\lambda) - 7(-1 - 7\lambda) + 4(1 + 4\lambda) + 3 = 0$

$18 + 81\lambda = 0$, d.h. $\lambda = -\frac{2}{9}$ mithin $x_0 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für den Abstand von a zu E ergibt sich $d(a,E) = d(a, x_0) =$
$= \|x_0 - a\| = \|\lambda \cdot u\| = \underbrace{|\lambda|}_{\frac{2}{9}} \cdot \underbrace{\|u\|}_{9} = 2$

1.11. Folgerung — Abstand Punkt zur Ebene

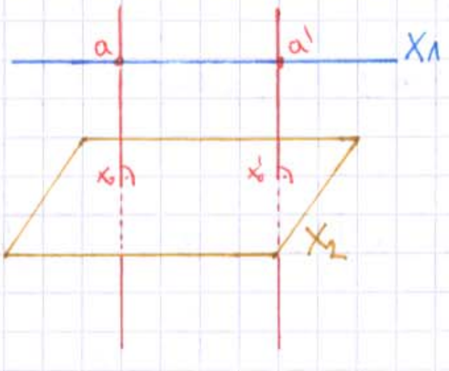
1.) Sei $X = t + U$ eine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$ mit der HNF $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{u} \circ x - \tilde{u} \circ t = 0\}$ sowie $a \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $l = a + \mathbb{R} \cdot \tilde{u}$ die Lotgerade von a auf X, und für den Lotfußpunkt $x_0 = a + \lambda \tilde{u} \in l \cap X$ gilt

$$0 = \underline{\tilde{u} \circ x_0 - \tilde{u} \circ t} \underset{\text{Bilinearität}}{=} \tilde{u} \circ (a + \lambda \tilde{u}) - \tilde{u} \circ t = \tilde{u} \circ a + \lambda \underbrace{\tilde{u} \circ \tilde{u}}_{= \|\tilde{u}\|^2 = 1} - \tilde{u} \circ t =$$

$= \tilde{u} \circ a - \tilde{u} \circ t + \lambda$, also $\lambda = \tilde{u} \circ t - \tilde{u} \circ a$. Damit erhält man $d(a, X) = d(a, x_0) = \|x_0 - a\| = \|(a + \lambda \tilde{u}) - a\| =$
$\|\lambda \cdot \tilde{u}\| = |\lambda| \cdot \underbrace{\|\tilde{u}\|}_{=1} = |\lambda| = |\tilde{u} \circ a - \tilde{u} \circ t|$.

Damit ist das konstante Glied $\tilde{u} \circ t$ in der HNF der Abstand des Ursprungs 0 von der Hyperebene X.

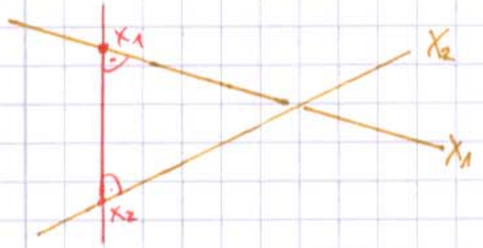
2.) Seien $X_1 = t_1 + U_1$ und $X_2 = t_2 + U_2$ affine Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ mit $U_1 \subseteq U_2$.



Insbesondere sind X_1 und X_2 parallel. Für alle $a, a' \in X_1$ gilt $d(a, X_2) =$ $= d(a', X_2) = d(t_1, X_2)$ insbesondere $d(X_1, X_2) = d(t_1, X_2)$

1.12 Satz

Seien $X_1 = t_1 + U_1$ und $X_2 = t_2 + U_2$ affine Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Dann gibt es Punkte $x_1 \in X_1$ und $x_2 \in X_2$ mit $x_2 - x_1 \perp U_1$ und $x_2 - x_1 \perp U_2$, und es gilt $\boxed{d(X_1, X_2) = d(x_1, x_2)}$;



im Falle $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ sind x_1 und x_2 eindeutig bestimmt. Man nennt die Verbindungsgerade ℓ von x_1 und x_2 gemeinsame Lotgerade von x_1 und x_2 sowie x_1 und x_2 die Lotfußpunkte.

1.13 Beispiel (H01 III 1)

Man berechne den Abstand der beiden Geraden $g_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2, x_3 = 1\}$ und $g_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 = x_3, x_2 = -x_1\}$.

Es ist $g_1 = t_1 + \mathbb{R} \cdot u_1$ mit $t_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie $g_2 = \mathbb{R} u_2$ mit $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, damit sind g_1 und g_2 windschief.

Für die gemeinsame Lotgerade ℓ gilt $\ell = x_2 + \mathbb{R} \cdot u$ mit $u = u_1 \times u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $x_2 = \tau u_2 = \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, und für den Lotfußpunkt x_1 damit

$$\underbrace{\tau \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\in \ell} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in g_1},$$

also $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right)$$ ist $\tau = \frac{1}{3}$, $\mu = 0$, $\lambda = -\frac{1}{3}$

also $x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $x_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Man erhält

$\ell = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sowie $d(g_1, g_2) = d(x_1, x_2) = \|x_2 - x_1\| =$