25.04.06

Synthetische und analytische Behandlung geometrischer Probleme

Euklid (von Alexandria; um 365 – 300 v Chr.) schuf in seinem maßgeblichen Werk „Die Elemente" einen axiomatischen Aufbau der Elementargeometrie: nach Definitionen und Postulaten / Axiomen folgen Sätze mit exakten Beweisen (synthetische Geometrie).

Dieses Vorgehen werde kurz an einem Beispiel in der Anschauungsebene verdeutlicht.

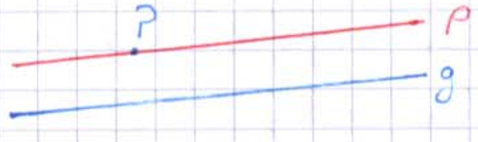
(D1) Eine Gerade g durch zwei verschiedene Punkte P und Q heißt Verbindungsgerade von P und Q.

(D2) Ein Punkt P auf zwei verschiedenen Geraden g und h heißt Schnittpunkt von g und h.

(D3) Zwei Geraden heißen parallel, wenn sie entweder gleich sind oder aber keinen Schnittpunkt haben

(A1) Zu zwei verschiedenen Punkten P und Q gibt es genau eine Verbindungsgerade g = PQ

(A2) Zu jedem Punkt P und jeder Geraden g gibt es genau eine Parallele p zu g durch P. (Parallelaxiom)



(S) Nichtparallele Geraden g und h haben genau einen Schnittpunkt $g \cap h$.

(B) Existenz: $g \nparallel h \underset{(D3)}{\Longrightarrow}$ es gibt einen Schnittpunkt S von g und h.

Eindeutigkeit: Sei auch T ein Schnittpunkt von g und h

Annahme: $S \neq T \underset{(A1)}{\Longrightarrow} g = \overline{ST} = h$,

also $g = h \underset{(D3)}{\Longrightarrow} g \parallel h$ Widerspruch!

Also: $S = T$

Geometrische Fragestellung lassen sich aber auch mit Hilfe der linearen Algebra untersuchen (analytische Geometrie). Dabei wird ein euklidischer Vektorraum (V, σ) zugrunde-gelegt, wobei wir uns hier auf $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt σ_E

$$\sigma(x,y) = \langle x | y \rangle = \boxed{x \circ y = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n} = x^T y$$

für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

beschränken, für $n=2$ liegt die euklidische Anschauungsebene $\mathbb{R}^2$, für $n=3$ der euklidische Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$ vor.

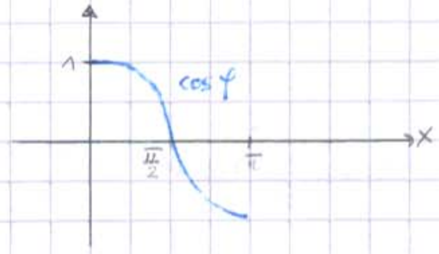
Wir vereinbaren (bzw. erinnern an) die folgenden Begriffe und Schreibweisen:

* Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\|x\| = \sqrt{x \circ x} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ die Länge des Vektors x, ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ der Länge $\|x\| = 1$ heißt normiert.

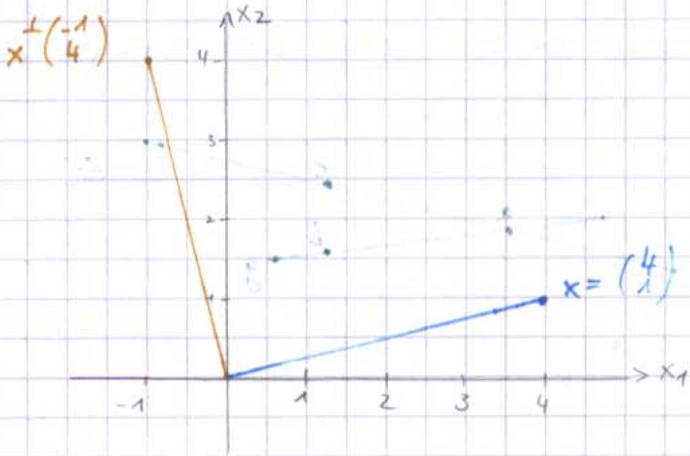
* Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $x \circ y = 0$ heißen orthogonal; wir schreiben $x \perp y$

* Für $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist $\varphi \in [0, \pi]$ mit $\cos\varphi = \frac{x \circ y}{\|x\| \cdot \|y\|}$ der Winkel zwischen den Vektoren x und y; dann gilt

$x \perp y \iff x \circ y = 0 \iff \cos\varphi = 0 \iff \varphi = \frac{\pi}{2}$



* Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sei $x^\perp = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$; damit ist $x \perp x^\perp$ mit $\det(u, x^\perp) = u \circ x$ für alle $u \in \mathbb{R}^2$.



Für $x \neq 0$ ist $x, x^\perp$ ein Rechtssystem.

* Für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sei

$$x \times y = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

das Vektorprodukt; damit ist $\boxed{x \perp x \times y \text{ und } y \perp x \times y}$ mit $\det(x, y, u) = (x \times y) \circ u$ für alle $u \in \mathbb{R}^3$. Sind x, y linear unabhängig, so ist $x \times y \neq 0$ und $x, y, x \times y$ sind ein Rechtssystem.

§ 1 Geometrische Objekte

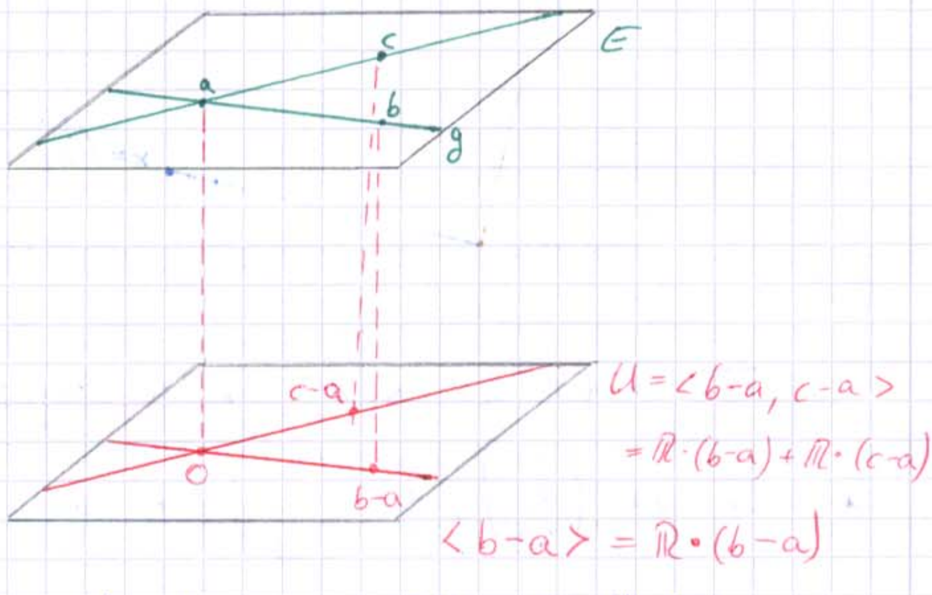
A. Affine Mengen

1.1. Bemerkung

Wir betrachten den Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$.

1) Ein Punkt A wird mit einem Ortsvektor $a \in \mathbb{R}^3$ (oder mit $a + \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$) identifiziert.

2) Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$ mit $a \neq b$. Die Verbindungsgerade g von a und b ist die parallele Gerade zu $\langle b-a \rangle$



durch a, es ist also $g = a + \langle b-a \rangle$ mit dem Trägerpunkt a und dem Richtungsvektor $b-a \neq 0$.

3) Ferner sei $c \in \mathbb{R}^3$ mit $c \notin g$; damit ist $c-a \notin \langle b-a \rangle$, also sind $b-a, c-a$ linear unabhängig. Die von a, b, c aufgespannte Ebene E ist die parallele Ebene zu $U = \langle b-a, c-a \rangle$ durch a, es ist also $E = a + U$ mit dem Trägerpunkt a und dem Richtungsraum U.

1.2. Definition

1.) Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ der Form $X = t + U$ mit einem Vektor $t \in \mathbb{R}^n$ und einem Untervektoraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt affin, zudem wird die leere Menge $\emptyset$ als affin betrachtet.

2.) Für die affine Teilmenge $X = t + U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Richtung (oder der Richtungsraum) U eindeutig bestimmt, während als Trägerpunkt $t \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiges Element von X gewählt werden kann, dabei gilt:

a) $X = t + U$ „Punkt = Trägerpunkt + Richtungsvektor"

b) $U = X - t$ „Punkt - Trägerpunkt = Richtungsvektor"

3.) Affine Teilmengen $X = t + U$ und $X' = t' + U'$ heißen

a) parallel, wenn $U \subseteq U'$ oder $U' \subseteq U$ gilt ($X \parallel X'$)

b) orthogonal (oder senkrecht), wenn $U \perp U'$

c) windschief, wenn $X \nparallel X'$ und $X \cap X' = \emptyset$ gilt.

4.) Für $X = t + U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt $\dim(X) := \dim(U)$ die Dimension von X; speziell für $\dim(X) = 0, 1, 2, n-1$ heißt X Punkt, Gerade, Ebene, Hyperebene

27.04.06

1.3. Beispiel

(H 02 III 1) Man bestimme alle Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche die Geraden
$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2\alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix}$$
sich schneiden bzw. parallel bzw. windschief sind. g_1 und g_2 sind genau dann parallel, wenn $\begin{pmatrix} 1 \\ 2\alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ gilt, also