

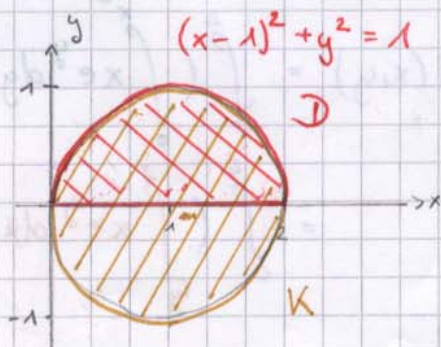
$$\begin{aligned}
 \int_{\Pi} x \cdot y \, d(x,y) &= \int_0^a \left(\int_0^a f(x,y) \, dx \right) dy \\
 &= \int_0^a \left(\int_{\sqrt{a^2-y^2}}^a x \cdot y \, dx \right) dy \\
 &= \int_0^a \left(\left[\frac{1}{2} x^2 y \right]_{x=\sqrt{a^2-y^2}}^{x=a} \right) dy \\
 &= \int_0^a \left(\frac{1}{2} a^2 y - \frac{1}{2} (a^2 - y^2) y \right) dy \\
 &= \int_0^a \frac{1}{2} y^3 \, dy = \left[\frac{1}{8} y^4 \right]_{y=0}^{y=a} = \frac{1}{8} a^4.
 \end{aligned}$$

10.01.06

- 2.) (7 95 II 5) Es seien $K \subseteq \mathbb{R}^2$ der abgeschlossene Kreis mit Radius 1 und den Mittelpunkt $(1,0) \in \mathbb{R}^2$ und $D = \{(x,y) \in K \mid y \geq 0\}$. Weiter sei die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x} \sin x, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- a) Man untersuche f auf Stetigkeit
b) Man berechne $\int f(x,y) \, d(x,y)$



Die Funktion f ist zunächst in jedem Punkt $(a,b) \in D \setminus \{(0,0)\}$ als Produkt stetiger Funktionen selbst stetig. Ferner gilt für alle $(x,y) \in D$ mit $(x,y) \neq (0,0)$.

$$\begin{aligned}
 |f(x,y) - f(0,0)| &= \left| \frac{y}{x} \sin x - 0 \right| = \frac{|y|}{|x|} \cdot |\sin x| \leq \\
 &\leq \frac{|y|}{|x|} \cdot |x| = |y| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0;
 \end{aligned}$$

damit ist $f(x,y) \rightarrow f(0,0)$ für $(x,y) \rightarrow (0,0)$, also ist f auch im Punkt $(a,b) = (0,0)$ stetig. Insgesamt ist also f eine auf D stetige Funktion.

b) Nach a) ist $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf dem kompakten Definitionsgebiet $D \subseteq \mathbb{R}^2$, und nach dem Satz von Fubini gilt:

$$\begin{aligned} \int_D f(x,y) d(x,y) &= \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{y}{x} \sin x dy \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left[\frac{1}{2} y^2 \cdot \frac{\sin x}{x} \right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-(x-1)^2}} dx \\ &= \int_0^2 \frac{1-(x-1)^2}{2x} \sin x dx \\ &= \int_0^2 \underbrace{\left(1 - \frac{x}{2}\right)}_{v(x)} \underbrace{\sin x}_{u'(x)} dx = \left[\underbrace{\left(1 - \frac{x}{2}\right)}_{v(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{u(x)} \right]_0^2 - \int_0^2 \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)}_{v'(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{u(x)} dx \\ &= (0 - (-1)) - \frac{1}{2} \int_0^2 \cos x dx = 1 - \frac{1}{2} [\sin x]_0^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin 2 \end{aligned}$$

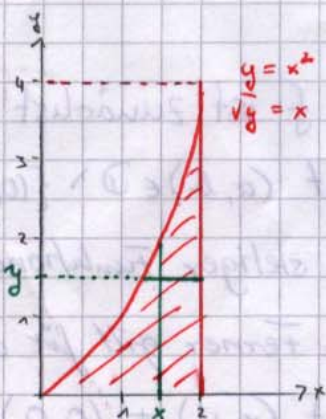
$\frac{1-(x-1)^2}{2x} = \frac{1-(x^2-2x+1)}{2x} = \frac{2x-x^2}{2x} = 1 - \frac{x}{2}$

3) (7 94 III 5) Man zeige $\int_0^2 \int_0^{x^2} x e^y dy dx = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 x e^y dx dy$

Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2 \text{ und } 0 \leq y \leq x^2\}$ sowie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x \cdot e^y$. Damit ist f eine stetige Funktion auf dem

Kompaktum D , und nach dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned} \int_D f(x,y) d(x,y) &= \int_0^2 \left(\int_0^{x^2} x e^y dy \right) dx \\ &= \int_0^4 \left(\int_{\sqrt{y}}^2 x e^y dx \right) dy \end{aligned}$$



2.5. Bemerkung

Der Satz von Fubini gilt auch für Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen, z.B. (F 90 III 6).

Man berechne $\int_B \frac{\sqrt{x}}{(1+y^2)(2+z)^2} d(x,y,z)$ mit $B = [0,1]^3 \subseteq \mathbb{R}^3$

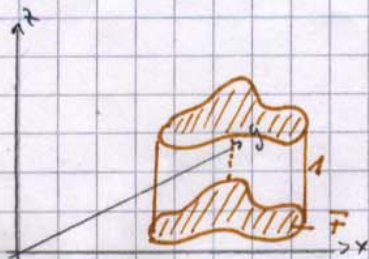
Nach dem Satz von Fubini gilt:

$$\begin{aligned} \int_B \frac{\sqrt{x}}{(1+y^2)(2+z)^2} d(x,y,z) &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(1+y^2)(2+z)^2} dx \right) dy \right) dz \\ &= \underbrace{\frac{1}{(1+y^2)(2+z)^2} \cdot \int_0^1 \sqrt{x} dx}_{\frac{1}{(2+z)^2} \cdot \left(\int_0^1 \sqrt{x} dx \right) \cdot \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}} \\ &= \left(\int_0^1 \sqrt{x} dx \right) \cdot \left(\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} \right) \cdot \left(\int_0^1 \frac{dz}{(2+z)^2} \right) = \\ &= \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \cdot \left[\arctan y \right]_0^1 \cdot \left[-\frac{1}{2+z} \right]_0^1 = \\ &= \left(\frac{\frac{3}{2}}{3} - 0 \right) \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) \cdot \left(-\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi}{36} \end{aligned}$$

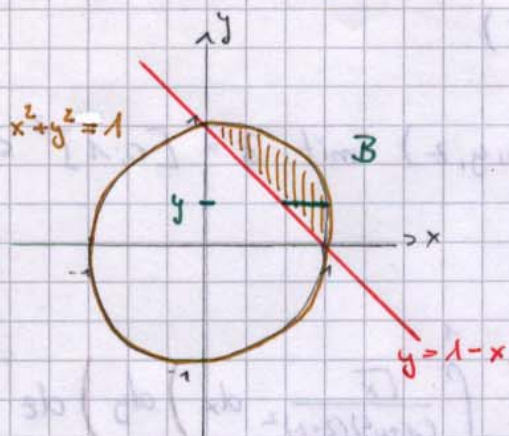
2.6. Bemerkung

1.) Für den Inhalt A einer kompakten Fläche $F \subseteq \mathbb{R}^2$ gilt

$A = \int_F 1 d(x,y) = \text{Volumen des Zylinders mit Grundfläche } F \text{ vom Inhalt } A \text{ und Höhe } 1.$



(7.05.14) Man berechne für jedes $n \in \mathbb{N}$ $a_n = \int_B (1 + xy^n) d(x,y)$ mit $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \leq x+y\}$ und bestimme den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:



Es ist $a_n = \int_B 1 d(x,y) + \int_B xy^n d(x,y)$

mit $\int_B 1 d(x,y) = A_B = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ und

$$\int_B xy^n d(x,y) = \int_0^1 \left(\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} xy^n dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 (y^{n+1} - y^{n+2}) dy = \left[\frac{y^{n+2}}{n+2} - \frac{y^{n+3}}{n+3} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$$

Folglich ist $a_n = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2} x^2 y^n \right]_{x=1-y}^{x=\sqrt{1-y^2}} = \\ &= \frac{(1-y^2) - (1-y)^2}{2} \cdot y^n = \\ &= \frac{1-y^2 - 1 + 2y - y^2}{2} \cdot y^n = \\ &= y^{n+1} - y^{n+2} \end{aligned}$$

2.) Für das Volumen V eines kompakten Körpers $K \subseteq \mathbb{R}^3$ gilt entsprechend

$$V = \int_K 1 d(x,y,z)$$

(H.01.15) Ein hufförmiger Körper im $\mathbb{R}^3$ wird begrenzt durch die Zylinderfläche $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x^2\}$ und die Ebenen mit den Gleichungen $z=0$, $z=y$ und $y=1$. Man berechne sein Volumen.