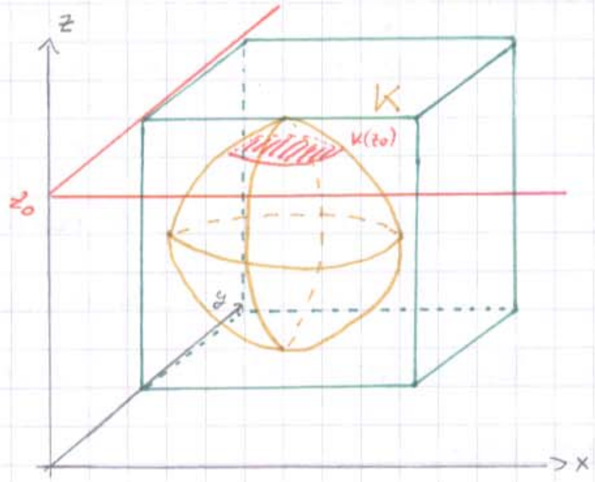
13.12.05

**1.4. Satz** (Satz von Cavalieri). Der Körper $K$ sei eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, damit ist $K$ insbesondere beschränkt un in einem achsenparallelen Quader $[a_0, a_1] \times [b_0, b_1] \times [c_0, c_1] \subseteq \mathbb{R}^3$ enthalten. Für jedes $z \in [c_0, c_1]$ betrachten wir die (ebenfalls kompakte) Schnittfigur




$K(z_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y,z_0) \in K\}$ des Körpers $K$ mit der zur x-y-Koordinatenebene parallelen Ebene $z = z_0$ durch den Punkt $(0;0;z_0)$; dabei berechne $A(z_0)$ ihren Flächeninhalt. Für das Volumen $V_K$ des Körpers $K$ gilt damit

$$\boxed{V_K = \int_{c_0}^{c_1} A(z)\, dz}$$

**1.5. Beispiele**

1.) (F 05 III 5 / H 93 III 5) Gegeben sei die Menge
$K = \{(x,y,z) \subseteq \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.

a) Man beschreibe und skizziere die Menge $K$.
Für jeden Punkt $(x,y,z) \in K$ gilt

* $x^2 + y^2 \leq 1$ ; damit liegt $(x,y,z)$ oberhalb oder unterhalb des Einheitskreises der x-y-Ebene, also innerhalb des Zylinders um die z-Achse mit Radius 1.

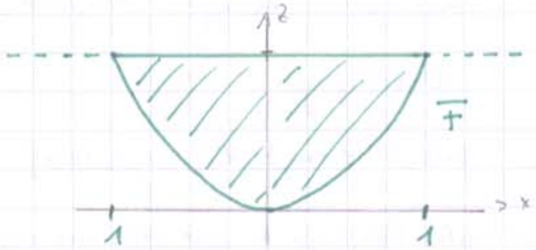
* $0 \leq x^2 + y^2 \leq z \leq 1$, also $0 \leq z \leq 1$, damit liegt $(x,y,z)$ zwischen den Ebenen $z=0$ und $z=1$.

Für alle $z_0 \in [0,1]$ betrachten wir die Schnittfigur $K(z_0)$ von $K$ mit der Ebene $z = z_0$, wegen

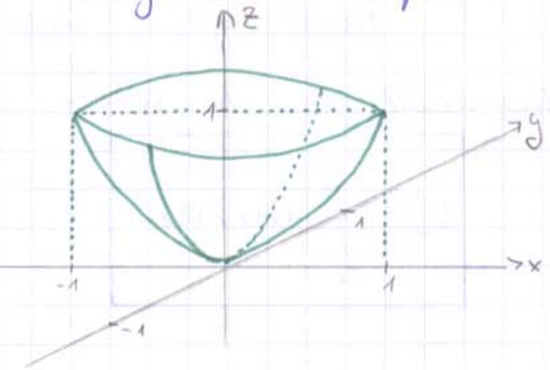
$K(z_0) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y,z_0) \in K \} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq z_0 \}$

ist $K(z)$ ein Kreis mit Radius $\sqrt{z_0}$ und besitzt daher den Flächeninhalt $A(z_0) = z_0 \pi$. Ferner ist der Schnitt von $K$ mit der $x$-$z$-Ebene $y=0$.

$$F = \{ (x,z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,0,z) \in K \} = \{ (x,z) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 \leq z \leq 1 \}$$




die zwischen der Parabel $z = x^2$ und der Geraden $z=1$ gelegene Fläche; damit entsteht $K$ durch Rotation von $F$ um die $z$-Achse und stellt damit den durch das Paraboloid $x^2+y^2 = z$ und der Ebene $z=1$ begrenzten Körper dar.




b) Man berechne das Volumen von $K$.

Nach dem Satz von Cavalieri gilt

$$V_K = \int_0^1 A(z_0)\, dz_0 = \int_0^1 z_0 \pi \, dz_0 =$$

$$= \left[ \frac{1}{2} z_0^2 \pi \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

2.) (H 94 II 5) Man berechne das Volumen der Durchschnittsmenge der beiden Zylinder $Z_1 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x^2+y^2 \leq r^2 \}$ und

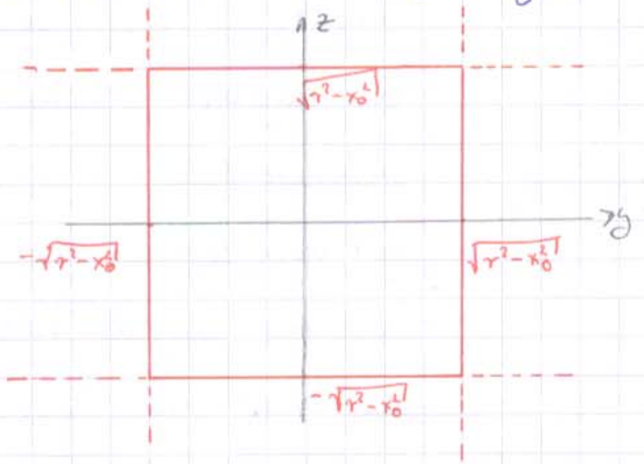
$Z_2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x^2+z^2 \leq r^2 \}$ mit $r > 0$.

Es bezeichne $K = Z_1 \cap Z_2$ den gegebenen Körper. Für jeden Punkt $(x,y,z) \in K$ gilt $x^2 \leq x^2+y^2 \leq r^2$, also $|x| \leq r$. Für alle $x_0 \in [-r,r]$ betrachten wir die Schnittfigur $K(x_0)$ von $K$ mit der Ebene $x = x_0$, wegen

$$\begin{aligned} K(x_0) &= \{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid (x_0,y,z) \in K \} \\ &= \{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 / \ x_0^2+y^2 \leq r^2 \text{ und } x_0^2+z^2 \leq r^2 \} \\ &= \{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 / \ y^2 \leq r^2-x_0^2 \text{ und } z^2 \leq r^2-x_0^2 \} \end{aligned}$$

$$= \{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \le \sqrt{r^2 - x_0^2} \text{ und } |z| \le \sqrt{r^2 - x_0^2} \}$$

$$= \{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{r^2 - x_0^2} \le y, z \le \sqrt{r^2 - x_0^2} \}$$



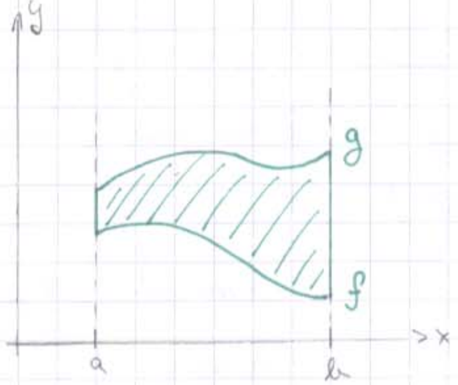

ist $K(x_0)$ ein Quadrat mit der Seitenlänge $2\sqrt{r^2-x_0^2}$ und besitzt daher den Flächeninhalt $A(z_0) = 4(r^2 - x_0^2)$. Nach Satz von Cavalieri gilt demnach für das Volumen $V_K$ des Körpers $K$:

$$V_K = \int_{-r}^{r} A(x_0)\, dx_0 = \int_{-r}^{r} 4(r^2 - x_0^2)\, dx_0 = 8 \int_0^r (r^2 - x_0^2)\, dx_0 =$$

$$= 8 \left[ r^2 x_0 - \frac{x_0^3}{3} \right]_0^r = 8 \left[ r^3 - \frac{r^3}{3} \right] = \frac{16}{3} r^3.$$

## 1.6. Bemerkung

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sowie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit $0 \le f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a,b]$.




Die Graphen $G_f$ und $G_g$ schließen zwischen $x = a$ und $x = b$ die Fläche

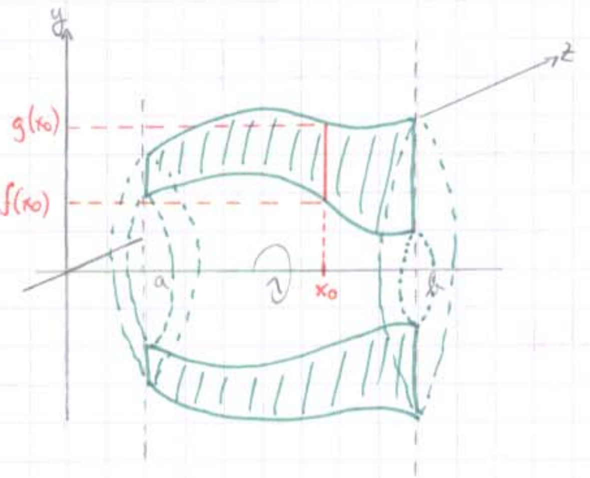
$$F = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b \text{ und } f(x) \le y \le g(x) \}$$

mit dem Inhalt

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\, dx.$$

Läßt man $F$ im $\mathbb{R}^3$ um die x-Achse rotieren, so entsteht der Rotationskörper

$$K = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (f(x))^2 \le y^2 + z^2 \le (g(x))^2 \}$$




Für alle $x_0 \in [a, b]$ ist die Schnittfigur $K(x_0)$ von $K$ mit der auf der x-Achse senkrecht stehende Ebene $x = x_0$ ein Kreisring mit dem inneren Radius $f(x_0)$ und dem äußeren Radius $g(x_0)$ und nach dem Flächeninhalt

$A(x_0) = (g(x_0))^2 \cdot \pi - (f(x_0))^2 \cdot \pi$. Nach dem Satz von Cavalieri gilt für das Volumen $V_K$ des Rotationskörpers $K$

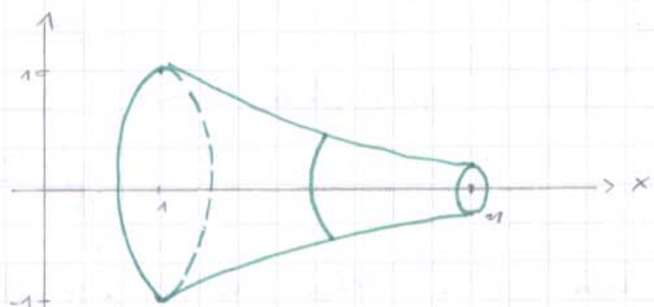
$$V_K = \pi \cdot \int_a^b \left( (g(x_0))^2 - (f(x_0))^2 \right) dx_0 .$$

1.7. Beispiel: Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte man die Menge

$$B_n = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x \leq n \text{ und } y^2 + z^2 \leq \frac{1}{x^2} \}.$$

Man zeige, daß die Folge $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Volumina $V_n$ von $B_n$ beschränkt ist.

Die Menge $B_n$ ist ein zur x-Achse symmetrischer Rotationskörper, der entsteht, indem man den Graphen $G_g$ der Funktion $g: [1, n] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$, um die x-Achse rotieren läßt (in der Bezeichnung der Bemerkung 1.6 ist $f = 0$).




Demnach gilt für sein Volumen:

$$V_n = \pi \int_1^n (g(x))^2 dx = \pi \cdot \int_1^n \frac{dx}{x^2} = \pi \cdot \left[ -\frac{1}{x} \right]_1^n = \pi \left( 1 - \frac{1}{n} \right)$$