

3.9 Beispiel

(H 97 III 5) Man löse das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 + 5y_2, & y_1(0) &= 13 \\ y_2' &= -2y_1 + 4y_2, & y_2(0) &= 1 \end{aligned}$$

Lösung: Es handelt sich um das homogene System von lin. Dgl'n.

$$y' = A \cdot y \text{ mit } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ und } A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Für das charakteristische Polynom χ_A der Matrix A gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 5 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-3-\lambda) \cdot (4-\lambda) - 5 \cdot (-2) = -12 + 3\lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 10$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1);$$

damit besitzt A die beiden (einfachen) Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$. Wegen

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$, und wegen

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist } v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ein}$$

Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$. Damit sind

$$\varphi_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi_1(x) = v_1 \cdot e^{\lambda_1 x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2x}$$

$$\text{und } \varphi_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi_2(x) = v_2 \cdot e^{\lambda_2 x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{-x},$$

ein Fundamentalsystem von $y' = A \cdot y$, und die Gesamtheit der Funktionen:

$$\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi(x) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-x}$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ stellt die allgemeine Lösung dar.

Alternativ: lässt sich das gegebene System

$$(I) \quad y_1' = -3y_1 + 5y_2$$

$$(II) \quad y_1' = -2y_1 + 4y_2$$

auch mit der Einsetzmethode behandeln. Dazu lösen wir (I) nach y_2 (oder aber (II) nach y_1) auf, also

$$(II) \Leftrightarrow (I') \quad y_2 = \frac{1}{5}y_1' + \frac{3}{5}y_1$$

Wegen $y_2' = \frac{1}{5}y_1'' + \frac{3}{5}y_1'$ erhalten wir damit

$$(II) \Leftrightarrow \frac{1}{5}y_1'' + \frac{3}{5}y_1' = -2y_1 + 4 \cdot \left(\frac{1}{5}y_1' + \frac{3}{5}y_1 \right)$$

$$\Leftrightarrow y_1'' + 3y_1' = -10y_1 + 4y_1' + 12y_1$$

$$\Leftrightarrow (II') \quad y_1'' - y_1' - 2y_1 = 0$$

Wegen (I) und (II) $\Leftrightarrow$ (I') und (II) $\Leftrightarrow$ (I') und (II')

bestimmen wir zunächst die Lösungen y_1 von (II') und ermitteln daraus dann die Lösungen y_2 unter Verwendung von (I').

* Die homogene lin. Dgl. (II') $y_1'' - y_1' - 2y_1 = 0$ besitzt das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$ mit den beiden (einfachen) Nullstellen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = -1$, damit bilden die beiden Funktionen

$$\psi_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi_1(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{2x}$$

$$\text{und } \psi_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{-x}$$

ein Fundamentalsystem von $y_1'' - y_1' - 2y_1 = 0$. Damit ist $y_1 = d_1\psi_1 + d_2\psi_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y_1(x) = d_1e^{2x} + d_2e^{-x}$ mit Konstanten $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$.

* Für $y_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ergibt sich nun mit Hilfe von (I')

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \frac{1}{5}y_1'(x) + \frac{3}{5}y_1(x) = \frac{1}{5}(2d_1e^{2x} - d_2e^{-x}) + \frac{3}{5}(d_1e^{2x} + d_2e^{-x}) \\ &= d_1e^{2x} + \frac{2}{5}d_2e^{-x} \end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir also

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 e^{2x} + d_2 e^{-x} \\ d_1 e^{2x} + \frac{2}{5} d_2 e^{-x} \end{pmatrix} = d_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + d_2 \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-x}$$

mit Konstanten $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$. Zur Bestimmung der noch freien Konstanten $c_1 = d_1$ und $c_2 = \frac{d_2}{5}$ verwenden wir die gegebene Anfangsbedingung.

$$y(0) = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Wegen } y(0) = \begin{pmatrix} d_1 + d_2 \\ d_1 + \frac{2}{5} d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{3}{5} d_2 = 12, \text{ also } d_2 = 20 \text{ und}$$

$$d_1 = -7; \text{ ist}$$

$$y(x) = \begin{pmatrix} -7 e^{2x} + 20 e^{-x} \\ -7 e^{2x} + 8 e^{-x} \end{pmatrix} = -7 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + 4 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-x}$$

die Lösung des gestellten Anfangswertproblems

Widerholung:

1.5 Satz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offene Teilmenge mit $(x_0, y_0) \in U$ sowie $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Dann gilt:

1.) (Existenzsatz von Peano) Ist f stetig, so existiert (mind.) eine max. Lösung $\varphi: \mathcal{D}\varphi \rightarrow \mathbb{R}$ des AWP $y' = f(x, y)$ mit $y(x_0) = y_0$

2.) (Eindeutigkeitssatz) Ist f darüber hinaus bzgl. y partiell db und $\partial_y f: U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist die Lösung φ von 1.) sogar eindeutig bestimmt.

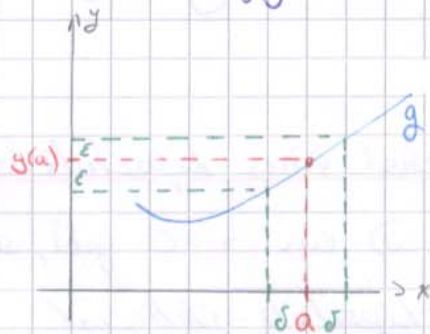
3.10. Bemerkung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ sowie $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

1a) g heißt stetig, wenn g in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist:

$$\forall a \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon$$

dabei kann δ in Abhängigkeit von $a \in D$ und $\varepsilon > 0$ gewählt werden.



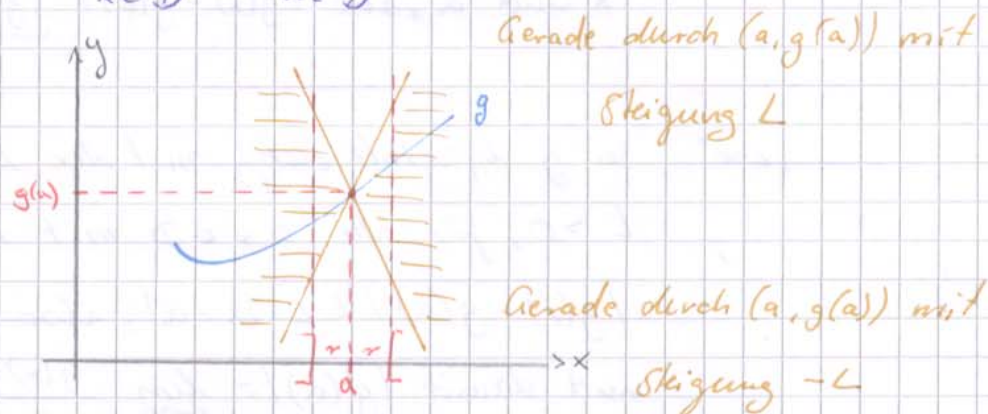
b) g heißt gleichmäßig stetig, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D \quad \forall a \in D \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon$$

dabei darf δ nur in Abhängigkeit von $\varepsilon > 0$ gewählt werden.

c) g heißt Lipschitz-stetig (Rudolf Lipschitz, 1832-1903), wenn gilt

$$\exists L > 0 \quad \forall x \in D \quad \forall a \in D \quad |g(x) - g(a)| \leq L \cdot |x - a|$$



dabei heißt L eine Lipschitzkonstante.

- 2.) Es gilt: g Lipschitz-stetig $\Rightarrow g$ glm. stetig $\Rightarrow g$ stetig
 Sei g Lipschitz-stetig mit der Lipschitzkonstante $L > 0$.
 Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta = \frac{\varepsilon}{L} > 0$, und damit gilt für alle $x, a \in D$ mit $|x - a| < \delta$

$$|g(x) - g(a)| \leq L \cdot \underbrace{|x - a|}_{< \delta} < L \cdot \delta = L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon;$$

also ist die Funktion gleichmäßig stetig. Die zweite Implikation ist klar.

- 3.) Man sagt, g genüge lokal einer Lipschitzbedingung, wenn es für jeden Punkt $a \in D$ ein $r > 0$ gibt, so daß g auf $D \cap]a - r, a + r[$ Lipschitz-stetig ist.

- 4.) Für eine differenzierbare Funktion g auf einem Intervall $D \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

a) g' beschränkt $\Rightarrow g$ Lipschitz-stetig

b) g' stetig $\Rightarrow g$ genügt lokal einer Lipschitzbedingung

a) " $\Rightarrow$ " Sei $|g'(x)| \leq L$ für alle $x \in D$. Für alle $x, a \in D$ gilt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung $g(x) - g(a) = g'(\xi) \cdot (x - a)$ für ein ξ zwischen x und a , also $|g(x) - g(a)| = \underbrace{|g'(\xi)|}_{\leq L} \cdot |x - a| \leq L \cdot |x - a|$

" $\Leftarrow$ " Sei g Lipschitz-stetig mit der Lipschitzkonstante $L > 0$, für alle $a, x \in D$ mit $x \neq a$ gilt

$$|g(x) - g(a)| \leq L \cdot |x - a|, \text{ also } \left| \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right| \leq L$$

$$\text{und damit } |g'(a)| = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \leq L$$

Damit ist g' beschränkt.

a) Da g' stetig ist, gibt es ein $r > 0$, so daß g' auf $D \cap]a-r, a+r[$ beschränkt ist, damit genügt g gemäß a) lokal einer Lipschitzbedingung.