

b) Man berechne für $\alpha = \frac{5}{2}$ alle Lösungen $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von (D), die die Anfangsbedingung $\varphi(0) = 1$ und $\varphi'(0) = 3$ erfüllen.

Es ist $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = (\lambda + 1)(\lambda + 4)$ mit $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -4$, damit ist jede Lösung φ von der Gestalt $\varphi(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{-4x}$ mit $\varphi'(x) = -c_1 \cdot e^{-x} - 4c_2 \cdot e^{-4x}$, dabei ist

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(0) = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1 \\ \varphi'(0) = 3 \Rightarrow -c_1 - 4c_2 = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3c_2 = 4 \Rightarrow c_2 = -\frac{4}{3} \\ \Rightarrow c_1 = \frac{7}{3} \end{array}$$

Also: $\varphi(x) = -\frac{7}{3}e^{-x} + \frac{4}{3}e^{-4x} \quad (x \in \mathbb{R})$

29.11.05

c) Man bestimme α so, daß (D) lauter periodische Funktionen als Lösungen hat.

Die Fundamentallösungen von (i) und (ii) sind nicht periodisch, die von (iii) genau im Fall $p=0$, also für $\alpha=0$ (und damit $\omega = \sqrt{4} = 2$), es handelt sich dabei um $\varphi(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$.

3.6. Bemerkung

1.) Sei (D) $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(x)$ eine inhomogene lineare Dgl. n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ und der stetigen Funktion: $b: J \rightarrow \mathbb{R}$ sowie (D₀) $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$ die zugeh. hom. Dgl.

a) Ist $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ein Fundamentalsystem von (D₀) sowie φ_p eine partikuläre Lösung von (D), so ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = \underbrace{c_1 \cdot \varphi_1 + \dots + c_n \cdot \varphi_n}_{\text{allg. Lösung von (D}_0\text{)}} + \varphi_p$$

für $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ die allg. Lösung von (D) .

- b) Bei speziellen rechten Seiten b läßt sich ein φ_p durch einen geeigneten Ansatz ermitteln: ist nämlich b von der Form $b(x) = p(x) \cdot e^{ax}$ für eine Polynomfunktion p vom Grade $m \in \mathbb{N}_0$ und $a \in \mathbb{R}$, so besitzt (D) eine partikuläre Lösung φ_p der Form $\varphi_p(x) = q(x) \cdot e^{ax}$, wobei q eine Polynomfunktion vom Grad $m + \alpha$ ist, wobei α die Vielfachheit von a als Nullstelle von $\chi(\lambda)$ bezeichnet (bei $\chi(a) \neq 0$ ist $\alpha = 0$).

- 2) Jede homogene lin. Dgl. (D_0) $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ n -ter Ordnung mit stetigen Koeffizientenfunktionen $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}: J \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt einen n -dim. Lösungsraum, jede Basis $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ heißt Fundamentalsystem von (D) . Ist φ_p eine part. Lösung der inhomogenen Gleichung

$$(D) \quad y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

mit der stetigen Funktion $b: J \rightarrow \mathbb{R}$, so ist wieder die Gesamtheit der Funktion

$$\varphi = \underbrace{c_1 \cdot \varphi_1 + \dots + c_n \cdot \varphi_n}_{\text{allg. Lösung von (D)}} + \varphi_p$$

für $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ die allg. Lösung von (D) . In der Regel entziehen sich aber $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sowie φ_p einer expliziten Berechnung.

3.7. Beispiel

(H02 II 5) Man bestimme die Gesamtheit der Lösungen des folgenden Systems von Differentialgleichungen.

$$(I) \quad x'(t) = 2x(t) - y(t) + 1$$

$$(II) \quad y'(t) = x(t) + 2y(t)$$

Für die erste Gleichung ist

$$(I) \Leftrightarrow (I') \quad \underline{y(t) = -x'(t) + 2x(t) + 1}$$

und mit Hilfe von (I') ergibt sich wegen

$$\underline{y'(t) = -x''(t) + 2x'(t) + 1}$$

aus der zweiten Gleichung

$$(II) \Leftrightarrow \underline{-x''(t) + 2x'(t) + 1} = x(t) + 2(-x'(t) + 2x(t) + 1)$$

$$\Leftrightarrow -x''(t) + 2x'(t) + 1 = x(t) - 2x'(t) + 4x(t) + 2$$

$$\Leftrightarrow -x''(t) + 4x'(t) - 5x(t) = 2t - 1$$

$$\Leftrightarrow (II') \quad \underline{x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 1 - 2t}$$

Wegen

$$(I) \text{ und } (II) \Leftrightarrow (I') \text{ und } (II) \Leftrightarrow (I') \text{ und } (II')$$

bestimmen wir zunächst die Lösungen $x(t)$ von (II') und ermitteln daraus dann die Lösungen $y(t)$ unter Verwendung von (I').

* Die homogene lineare Dgl. $x'' - 4x' + 5x = 0$ besitzt das charakt. Polynom $\chi(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$ mit den Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \left(-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 5} \right) = \frac{1}{2} (4 \pm \sqrt{-4}) = 2 \pm i;$$

damit bilden die beiden reellwertigen Fkt.

$$\varphi_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi_1(t) = e^{2t} \cos t \text{ und } \varphi_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi_2(t) = e^{2t} \sin t,$$

ein FS von $x'' - 4x' + 5x = 0$. Die inhomogene lin. Dgl.

$$x'' - 4x' + 5x = -2t + 1 \text{ besitzt die rechte Seite } b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$b(t) = -2t + 1.$$

Daher wählen wir als Ansatz für die partikuläre Lösung $y_p(t) = r_1 t + r_2$ mit geeignet zu bestimmenden Koeffizienten $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, wegen $y_p'(t) = r_1$ und $y_p''(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$y_p''(t) - 4 y_p'(t) + 5 y_p(t) = -2t + 1 \Leftrightarrow$$

$$0 - 4r_1 + 5(r_1 t + r_2) = -2t + 1 \Leftrightarrow$$

$$5r_1 t + (-4r_1 + 5r_2) = -2t + 1,$$

und der Koeffizientenvergleich liefert $5r_1 = -2$ und $-4r_1 + 5r_2 = 1$,

also $r_1 = -\frac{2}{5}$ und $r_2 = -\frac{3}{25}$, d.h. $y_p(t) = -\frac{2}{5}t - \frac{3}{25}$. Damit ist

$$x = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2 + y_p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x(t) = c_1 \cdot \underline{e^{2t} \cos t} + c_2 \cdot \underline{e^{2t} \sin t} - \underline{\frac{2}{5}t - \frac{3}{25}}$$

für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

* Für $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ergibt sich nun mit Hilfe von (I')

$$y(t) = -x'(t) + 2x(t) + t =$$

$$= - \left(\underline{2c_1 e^{2t} \cos t} - c_1 e^{2t} \sin t + \underline{2c_2 e^{2t} \sin t} + c_2 e^{2t} \cos t - \frac{2}{5} \right)$$

$$+ 2 \left(\underline{c_1 e^{2t} \cos t} + \underline{c_2 e^{2t} \sin t} - \frac{2}{5}t - \frac{3}{25} \right) + t$$

$$= c_1 e^{2t} \sin t - c_2 e^{2t} \cos t + \frac{1}{5}t + \frac{4}{25}.$$

Zusammenfassend erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \cos t + c_2 e^{2t} \sin t - \frac{2}{5}t - \frac{3}{25} \\ c_1 e^{2t} \sin t - c_2 e^{2t} \cos t + \frac{1}{5}t + \frac{4}{25} \end{pmatrix}$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^{2t} + \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -10t - 3 \\ 5t + 4 \end{pmatrix}$$

3.8. Satz

Für $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ betrachten wir das homogene System von lin. Dgl'n

$$y' = A \cdot y \quad \text{bzw.}$$

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n \end{aligned}$$

mit konstanter Koeffizientenmatrix $A = (a_{ij})_{i,j}$

- 1.) Ist $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x) = v \cdot e^{\lambda x},$$

$$\text{Wegen } \varphi'(x) = v \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} = \underbrace{\lambda \cdot v}_{= A \cdot v} \cdot e^{\lambda x} = A \cdot v \cdot e^{\lambda x} = A \cdot \varphi(x)$$

eine Lösung von $y' = A \cdot y$.

- 2.) Ist A diagonalisierbar, so existiert eine Basis $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A (zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$).

Dann bilden die n Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\varphi_k(x) = v_k \cdot e^{\lambda_k x} \quad \text{für alle } 1 \leq k \leq n, \text{ ein } \underline{\text{Fundamentalsystem}}$$

von $y' = A \cdot y$, d.h. jede Lösung φ von $y' = A \cdot y$ lässt sich in eindeutiger Weise als Linearcomb.

$$\varphi = c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n$$

der Fundamentallösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ schreiben.

- 3.) Die allg. Lösung von $y' = A \cdot y$ lässt sich auch mit Hilfe des oben verwendeten Einsetzungsverfahrens ermitteln.