

§ 3. Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme von Dgl.

22.11.05

3.1. Beispiele: Sei $h > 0$

1.) Die Funktion $\varphi_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_1(x) = e^{hx}$, und $\varphi_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_2(x) = e^{-hx}$, sind wegen

$$\varphi_1'(x) = h \cdot e^{hx} \text{ und } \varphi_1''(x) = h^2 e^{hx} = h^2 \cdot \varphi_1(x)$$

sowie analog $\varphi_2''(x) = h^2 \varphi_2(x)$ Lösungen der lin. Dgl. $y'' = h^2 y$ zweiter Ordnung; genauer ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1 \cdot e^{hx} + c_2 \cdot e^{-hx}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allg. Lösung.

2.) Die allg. Lösung von $y'' = 0$ ist offensichtlich die Gesamtheit der Fkt

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1 \cdot x + c_2$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3.) Die Funktionen $\varphi_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_1(x) = \cos(hx)$, und $\varphi_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi_2(x) = \sin(hx), \text{ sind wegen } \varphi_1'(x) = -h \cdot \sin(hx) \text{ und } \varphi_1''(x) =$$

$$= -h^2 \cdot \cos(hx) = -h^2 \varphi_1(x) \text{ sowie analog } \varphi_2''(x) = -h^2 \varphi_2(x) \text{ Lösungen}$$

der linearen Dgl. $y'' = -h^2 y$ zweiter Ordnung; genauer ist die Gesamtheit

$$\varphi = c_1 \cdot \varphi_1 + c_2 \cdot \varphi_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = c_1 \cos(hx) + c_2 \sin(hx)$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die allg. Lösung.

4.) Durch die Vorgabe eines Anfangswerts $y(x_0) = y_0$ und $y'(x_0) = y_0'$

mit $x_0, y_0, y_0' \in \mathbb{R}$ ließen sich die noch freien Konstanten

c_1, c_2 jeweils bestimmen.

3.2. Bemerkung (komplexe Exponentialfunktion)

- 1.) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ absolut und definiert die komplexe Exponentialfunktion.

$$\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Diese genügt der Funktionalgleichung $\exp(w+z) = \exp(w) \cdot \exp(z)$

für alle $w, z \in \mathbb{C}$; sie ist ferner auf $\mathbb{C}$ differenzierbar mit

$$\exp'(z) = \exp(z) \text{ und damit } \frac{d}{dz}(\exp(\lambda z)) = \lambda \cdot \exp(\lambda z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ und dem Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$.

- 2.) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n + (-ix)^n}{n!}$

$$\text{mit } \frac{(ix)^n + (-ix)^n}{n!} = \begin{cases} \frac{(ix)^n - (ix)^n}{n!} & , \text{ für } n \text{ ungerade} \\ \frac{2(ix)^{2m}}{(2m)!} = \frac{2 \cdot (-1)^m x^{2m}}{(2m)!} & , \text{ für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

$$\text{und damit } \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^m x^{2m}}{(2m)!} = \cos x;$$

$$\text{entsprechend gilt } \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \sin x$$

- 3.) Die komplexen Funktionen

$$\cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad (\text{Cosinus})$$

$$\sin: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \quad (\text{Sinus})$$

lassen sich also über die komplexe Exponentialfunktion definieren, dabei ist

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad \text{und} \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

3.3. Beispiel

Wir bestimmen den Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$ so daß

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(x) = e^{\lambda x}$$

Lösung der in (3.1.) betrachteten Dgl. an ist (Exponentialansatz);
dabei ist $\varphi'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ und $\varphi''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

1.) Für $y'' = k^2 y$ ergibt sich $\lambda^2 e^{\lambda x} = k^2 e^{\lambda x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und
damit $\lambda^2 = k^2$, also $\lambda = \pm k$, wir erhalten damit $\varphi_1(x) = e^{kx}$ und
 $\varphi_2(x) = e^{-kx}$

2.) Für $y'' = 0$ ergibt sich $\lambda^2 e^{\lambda x} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit
 $\lambda^2 = 0$, also $\lambda = 0$ (doppelt), wir erhalten damit nur $\varphi_1(x) = e^{0x} = 1$,
eine zweite Lösung ist dann $\varphi_2(x) = x \cdot e^{0x} = x$.

3.) Für $y'' = -k^2 y$ ergibt sich $\lambda^2 e^{\lambda x} = -k^2 e^{\lambda x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$
und damit $\lambda^2 = -k^2 = (ik)^2$, also $\lambda = \pm ik$, wir erhalten damit
zunächst komplexwertige Lösungen

$$\varphi_1(x) = e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx)$$

und

$$\varphi_2(x) = e^{-ikx} = \cos(kx) - i \sin(kx)$$

und daraus schließlich die reellwertigen Lösungen

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}{2} = \cos(kx)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}{2i} = \sin(kx)$$

3.4. Satz

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$(*) \quad y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

mit den konstanten Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

1.) Der Exponentialansatz $y = e^{\lambda x}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ liefert das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad \text{von } (*);$$

es zerfällt über $\mathbb{C}$ vollständig in Linearfaktoren.

$$\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_r)^{\alpha_r}$$

mit den Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ der Vielfachheiten $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{N}$.

2.) Für eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$ der Vielfachheit $\alpha \in \mathbb{N}$ gilt:

a) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist $e^{\lambda x}$ eine reellwertige Lösung von $(*)$; im Falle $\alpha \geq 2$ sind dann $x e^{\lambda x}, \dots, x^{\alpha-1} e^{\lambda x}$ weitere Lösungen von $(*)$.

b) Ist $\lambda = p + i\sigma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, so ist auch $\bar{\lambda} = p - i\sigma \neq \lambda$ eine Nullstelle von χ ; damit sind

$$e^{\lambda x} = e^{px + i\sigma x} = e^{px} e^{i\sigma x} = e^{px} (\cos(\sigma x) + i \sin(\sigma x))$$

und

$$e^{\bar{\lambda} x} = e^{px - i\sigma x} = e^{px} e^{i(-\sigma x)} = e^{px} (\cos(\sigma x) - i \sin(\sigma x))$$

Komplexwertige Lösungen von $(*)$ sowie

$$e^{px} \cos(\sigma x) \quad \text{und} \quad e^{px} \sin(\sigma x)$$

reellwertige Lösungen $(*)$

Im Falle $\alpha \geq 2$ sind dann

$$x e^{\beta x} \cos(\alpha x), \dots, x^{\alpha-1} e^{\beta x} \cos(\alpha x) \\ x e^{\beta x} \sin(\alpha x), \dots, x^{\alpha-1} e^{\beta x} \sin(\alpha x)$$

weitere Lösungen von (*).

3.) Diese insgesamt n Lösungen bilden ein Fundamentalsystem von (*), d.h. eine Basis des n -dimensionalen Lösungsraum; jede Lösung von (*) lässt sich in eindeutiger Weise als Linearkombination dieser n Fundamentallösungen schreiben.

4.) Für jede Vorgabe eines Anfangswerts $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ lassen sich die n noch freien Konstanten der allgemeinen Lösung eindeutig bestimmen.

3.5. Beispiel

(400 II 5) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Man betrachte die Dgl. (D) $y'' + 2\alpha y' + 4y = 0$

a) Man berechne ein Fundamentalsystem von (D) ist

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\alpha\lambda + 4 \text{ mit den Nullstellen } \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-2\alpha \pm \sqrt{(2\alpha)^2 - 4 \cdot 4}) = \\ = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}.$$

(i) Für $|\alpha| > 2$ sind λ_1 und λ_2 einfache reelle Nullstellen, und $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$ ein Fundamentalsystem von (D).

(ii) Für $|\alpha| = 2$ ist $\lambda = -\alpha$ eine doppelte reelle Nullstelle, und $e^{\lambda x}, x \cdot e^{\lambda x}$ ein Fundamentalsystem von (D).

(iii) Für $|\alpha| < 2$ sind $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\sqrt{4 - \alpha^2}$ mit $\rho = -\alpha$ und $\sigma = \sqrt{4 - \alpha^2}$ einfache komplexe Nullstellen; damit sind $e^{\rho x} \cos(\sigma x), e^{\rho x} \sin(\sigma x)$ ein Fundamentalsystem von (D).

b) Man berechne für $\alpha = \frac{5}{2}$ alle Lösungen $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von (D), die die Anfangsbedingung $\varphi(0) = 1$ und $\varphi'(0) = 3$ erfüllen.

Es ist $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = (\lambda + 1)(\lambda + 4)$ mit $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -4$,
damit ist jede Lösung φ von der Gestalt $\varphi(x) = c_1 \cdot e^{-x} + c_2 \cdot e^{-4x}$
mit $\varphi'(x) = -c_1 \cdot e^{-x} - 4c_2 \cdot e^{-4x}$, dabei ist

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(0) = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1 \\ \varphi'(0) = 3 \Rightarrow -c_1 - 4c_2 = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} -3c_2 = 4 \Rightarrow c_2 = -\frac{4}{3} \\ \Rightarrow c_1 = \frac{7}{3} \end{array}$$

Also: $\varphi(x) = -\frac{7}{3} e^{-x} + \frac{4}{3} e^{-4x} \quad (x \in \mathbb{R})$