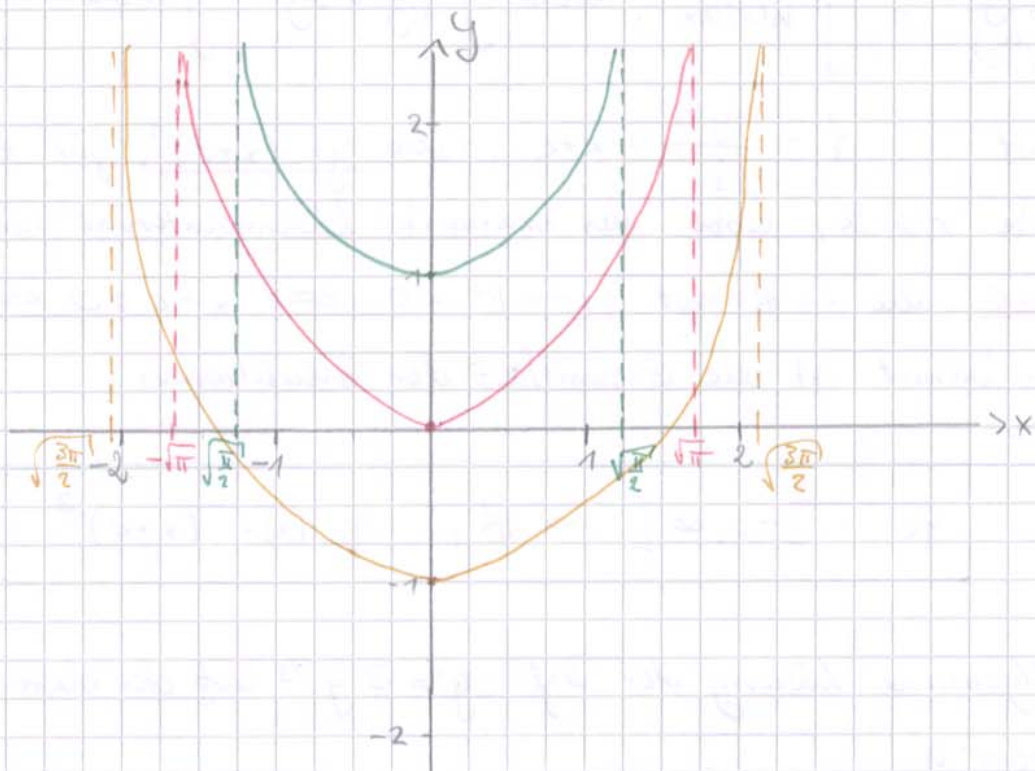




15.11.05

2.11. Beispiel

(H 98 I 4) Man bestimme alle Lösungen des AWP $y' = 3y^{2/3}$ mit $y(0) = 0$.

Es handelt sich um die autonome Dgl $y' = g(y)$ mit der stetigen Funktion $g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $g(y) = 3 \cdot y^{2/3}$, damit ist g auf $\mathbb{R}^+$ diffbar, und wegen $g'(y) = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot y^{-1/3} = 2 \cdot y^{-1/3}$ für alle $y > 0$ ist g' auf $\mathbb{R}^+$ auch stetig. Damit besitzt das AWP (mindestens) eine Lösung, etwa die Nullfunktion $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 0$; aber weder Satz 2.6 (g nicht nullstellenfrei) noch Satz 2.8 (g nicht stetig diffbar) garantiert die Eindeutigkeit dieser Lösung.

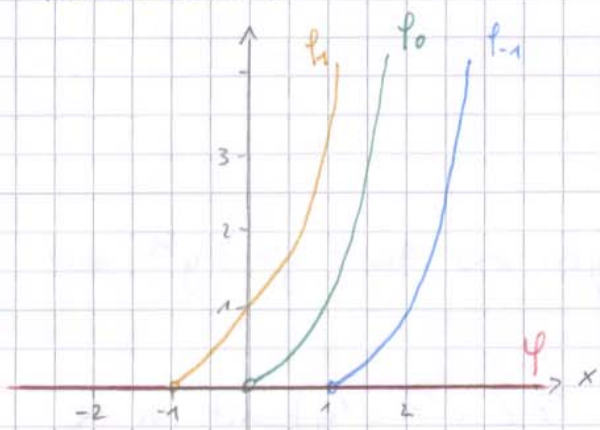
Betrachtet man dagegen $y' = 3 \cdot y^{2/3}$ nur auf der oberen Halbebene $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, so besitzt diese (nach Satz 2.6 wie nach Satz 2.8) für jeden Punkt $(x_0, y_0) \in U$ eine eindeutig bestimmte max. Lösung $\varphi: D_\varphi \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_0) = y_0$. Damit erhalten wir:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x) dx, \text{ also } \int \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} dy = \int 1 dx$$

und damit $\frac{1}{3} \cdot \frac{y^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} = x + c$, also $y = (x+c)^3$, für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, wobei das maximale Lösungsintervall im Hinblick auf $y > 0$ alle $x \in \mathbb{R}$ mit $(x+c)^3 > 0 \Leftrightarrow x+c > 0 \Leftrightarrow x > -c$ enthält. Damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_c:]-c, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = (x+c)^3$$

die allgemeine Lösung der Dgl. $y' = 3 \cdot y^{\frac{2}{3}}$ auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$.



Diese lassen sich aber durch die konstante Lösung φ auf ganz $\mathbb{R}$ fortführen die Fol:

$$\varphi_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = \begin{cases} (x+c)^3, & \text{für } x > -c \\ 0, & \text{für } x \leq -c \end{cases}$$

sind nämlich stetig und zunächst in jedem Punkt $x \neq -c$ auch diffbar:

$$\varphi_c' = \begin{cases} 3(x+c)^2, & \text{für } x > -c \\ 0, & \text{für } x \leq -c \end{cases}$$

und wegen $\lim_{x \rightarrow -c^+} \varphi_c'(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -c^-} \varphi_c'(x)$ ist φ_c auch im Punkt $x = -c$ diffbar mit $\varphi_c'(-c) = 0$.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt demnach

$$\varphi_c'(x) = \begin{cases} 3(x+c)^2 = 3 \cdot \left((x+c)^3 \right)^{2/3} = 3 \cdot (\varphi_c(x))^{2/3}, & \text{für } x > -c \\ 0 = 3 \cdot 0^{2/3} = 3 \cdot (\varphi_c(x))^{2/3}, & \text{für } x \leq -c \end{cases}$$

weswegen $\varphi_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von $y' = 3 \cdot y^{2/3}$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ ist; diese erfüllt die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ genau im Fall $c \leq 0$.

2.12. Bemerkung

Zur Lösung der Gleichung $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 32 = 0$ führen wir eine neue Unbestimmte $y = 2^x$ ein und erhalten die quadratische Gleichung $y^2 - 12y + 32 = 0$ mit den Lösungen

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 32} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(12 \pm \sqrt{16} \right) = \frac{12 \pm 4}{2}, \end{aligned}$$

also $y_1 = 8$ mit $x_1 = 3$ und $y_2 = 4$ mit $x_2 = 2$.

2.13. Beispiel

Man bestimme die maximale Lösung des AWP $y' = (x+y)^2$ mit $y(0) = 0$, indem man die Funktion $u(x) = x + y(x)$ als neue unbekannte Funktion einführt.

In einer diffbaren Funktion $y: D \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion $u: D \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = x + y(x)$, damit ist u ebenfalls diffbar mit $u'(x) = 1 + y'(x)$ für alle $x \in D$. Folglich gilt

$$\underline{y' = (x+y)^2} \Rightarrow \underline{u' = 1 + y' = 1 + (x+y)^2 = 1 + u^2}$$

sowie

$$\underline{u' = 1 + u^2} \Rightarrow \underline{y' = u' - 1 = (1 + u^2) - 1 = u^2 = (x+y)^2}$$

Wir lösen zunächst die autonome Dgl. $u' = 1 + u^2$ für die Funktion u und erhalten

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \int 1 \, dx, \text{ also } \arctan u = x + c$$

bzw. $u = \tan(x+c)$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Für die gesuchte Lösung y der gegebenen Dgl. $y' = (x+y)^2$ ergibt sich dann

$$y = -x + u = -x + \tan(x+c)$$

wegen $y(0)=0$ ist $0 = -0 + \tan(0+c) \iff 0 = \tan c$,
und wir können etwa $c=0$ (oder jedes Element aus $\mathbb{Z} \cdot \pi$)
wählen und erhalten $y = -x + \tan x$. Schließlich erhalten
wir als max. Lösung des gestellten AWP.

$$\varphi:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = -x + \tan x$$

2.14 Beispiel

1.) Es sei $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1}{x} \cdot y' = 4 \ln x \quad \text{für } x > 0$$

Man zeige: Für die Funktion $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(t) = f(e^t)$
gilt $\varphi''(t) = 4te^{2t}$

Mit Hilfe der Kettenregel ergibt sich für alle $t \in \mathbb{R}$.

$$\varphi'(t) = f'(e^t) \cdot e^t$$

sowie (unter Verwendung auch der Produktregel)

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= (f''(e^t) \cdot e^t) \cdot e^t + f'(e^t) \cdot e^t = \\ &= \underbrace{\left(f''(e^t) + \frac{1}{e^t} \cdot f'(e^t) \right)}_{= 4 \cdot \ln e^t} e^{2t} = 4te^{2t} \end{aligned}$$

2.) Man bestimme die max. Lösung des AWP $y'' + \frac{1}{x} y' = 4 \ln x$
mit $y(1) = 0$ und $y'(1) = 2$

Wir bestimmen zunächst φ durch zweimaliges Integrieren,
dabei ergibt sich durch die Anfangsbedingung:

$$\varphi(0) = f(e^0) = f(1) = 0 \quad \text{und}$$

$$\varphi'(0) = f'(e^0) \cdot e^0 = f'(1) = 2.$$

Wegen $\int 4te^{2t} dt = \int (2t) \cdot (2e^{2t}) dt = 2te^{2t} - \int 2e^{2t} dt$
 $= 2te^{2t} - e^{2t} + c$ ist $\varphi'(t) = (2t-1)e^{2t} + c =$
 $\stackrel{\varphi'(0)=2}{=} (2t-1) \cdot e^{2t} + 3$, und wegen

$$\int ((2t-1)e^{2t} + 3) dt = \int (2t-1)e^{2t} dt + \int 3 dt = (2t-1) \cdot \frac{e^{2t}}{2} -$$

$$- \int 2 \cdot \frac{e^{2t}}{2} dt + 3t = (t - \frac{1}{2})e^{2t} - \frac{1}{2}e^{2t} + 3t + c = (t-1)e^{2t} + 3t + c$$

ist $\varphi(t) = (t-1)e^{2t} + 3t + c \stackrel{\varphi(0)=0}{=} (t-1)e^{2t} + 3t + 1.$

Folglich ist $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \varphi(\ln x) =$

$$(\ln x - 1) \cdot e^{2 \ln x} + 3 \ln x + 1 = x^2(\ln x - 1) + 3 \ln x + 1.$$

Die Probe $f'(x) = 2x(\ln x - 1) + x^2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{3}{x}$
 $= 2x \ln x - 2x + x + \frac{3}{x}$
 $= \underline{2x \ln x - x + \frac{3}{x}}$

und $f''(x) = 2 \cdot \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} - 1 - \frac{3}{x^2}$
 $= \underline{2 \ln x + 1 - \frac{3}{x^2}}$

liefert $f''(x) + \frac{1}{x} \cdot f'(x) = \underline{2 \ln x + 1 - \frac{3}{x^2}} + \frac{1}{x} \left(\underline{2x \ln x - x + \frac{3}{x}} \right)$
 $= 2 \ln x + 1 - \frac{3}{x^2} + 2 \ln x - 1 + \frac{3}{x^2}$
 $= 4 \ln x \quad \text{für alle } x > 0.$

sowie $f(1) = 0$ und $f'(1) = 2$