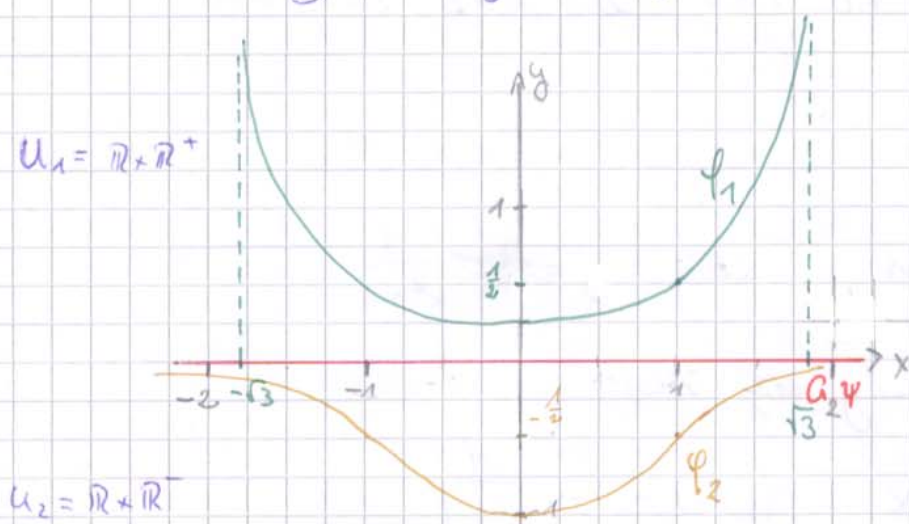


zunächst ist die konstante Funktion $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(x) = 0$, eine max. Lösung der Dgl. Da jede andere maximale Lösung $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

können gemeinsamen Punkt mit ψ haben kann, verläuft der Graph G_φ entweder komplett oberhalb oder komplett unterhalb der x -Achse, wir können also die Dgl. getrennt nach der oberen Halbebene $U_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ und der unteren Halbebene $U_2: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$ untersuchen.



Da g auf $\mathbb{R}^+$ und $\mathbb{R}^-$ ohne Nullstellen ist, erhalten wir mit Satz 2.6

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x) dx, \text{ also } \int \frac{dy}{y^2} = \int 2x dx, \text{ also}$$

$$-\frac{1}{y} = x^2 + c \quad \text{für eine Konstante } c \in \mathbb{R}.$$

8.11.05

* Für $a = \frac{1}{2}$, also $y(1) = \frac{1}{2}$, ist

$$-\frac{1}{\frac{1}{2}} = 1^2 + c \Leftrightarrow -2 = 1 + c \Leftrightarrow c = -3$$

und damit

$$-\frac{1}{y} = x^2 - 3, \text{ also } y = \frac{1}{3-x^2};$$

die maximale Lösung des AWP

$$\varphi_1:]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[\rightarrow \mathbb{R}, \varphi_1(x) = \frac{1}{3-x^2}$$

verläuft in der oberen Halbebene U_1 .

* Für $a = -\frac{1}{2}$, also $y(1) = -\frac{1}{2}$, ist

$$-\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 1^2 + c \Leftrightarrow 2 = 1 + c \Leftrightarrow c = 1$$

und damit

$$-\frac{1}{y} = x^2 + 1, \text{ also } y = -\frac{1}{x^2 + 1}$$

die maximale Lösung des AWP's

$$\varphi_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x) = -\frac{1}{x^2 + 1}$$

verläuft in der unteren Halbebene u_2 .

2.8. Satz

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ zwei offene Intervalle mit $(x_0, y_0) \in I \times J$ sowie $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ und $J \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, wobei g als stetig diffbar vorausgesetzt sei. Dann besitzt das AWP

$$y' = h(x) \cdot g(y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0$$

eine eindeutig bestimmte maximale Lösung $\varphi: D_\varphi \rightarrow \mathbb{R}$

* Für $g(y_0) = 0$ ist dies die konstante Funktion

$$\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = y_0$$

* Für $g(y_0) \neq 0$ erhält man φ wieder dadurch, daß man die Gleichung

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x) dx + c$$

nach y auflöst und die Konstante $c \in \mathbb{R}$ der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ anpaßt, dabei kann

das maximale Definitionsintervall $D\varphi$ allerdings echt in J enthalten sein.

2.9. Bemerkung

Wir betrachten $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit den stetigen Funktionen $h: J \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: J \rightarrow \mathbb{R}$

* Im Falle $J = \mathbb{R}$ und $g(y) = 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$ ist mit einer Lösung $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$ auch $\varphi_c: J \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_c(x) = \varphi(x) + c$, eine Lösung von $y' = h(x)$ für $x \in J$, dabei entsteht G_{φ_c} aus G_{φ} durch Verschiebung um c entlang der y -Achse.

* Im Falle $J = \mathbb{R}$ und $h(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist mit einer Lösung $\varphi: D_{\varphi} \rightarrow \mathbb{R}$ auch $\varphi_c: D_{\varphi} - c \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_c(x) = \varphi(x+c)$, eine Lösung der autonomen Dgl. $y' = g(y)$ für $y \in J$, dabei entsteht G_{φ_c} aus G_{φ} durch Verschiebung um $-c$ entlang der x -Achse.

* Sei J symmetrisch um 0 sowie $y_0 \in J$, ferner sei das AWP $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit $y(0) = y_0$ eindeutig lösbar. Dann gilt:

- Ist h eine ungerade Funktion, so ist die Lösung φ des AWP eine gerade Funktion.
- Ist h eine gerade Funktion und $0 \in J$, so ist die Lösung des AWP mit $y(0) = 0$ eine ungerade Funktion.

Sei etwa h ungerade und $\varphi: D_\varphi \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung. Damit ist auch

$\psi: -D_\varphi \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(x) = \varphi(-x)$, wegen

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \varphi'(-x) \cdot (-1) = \left(\underbrace{h(-x)}_{-h(x)} - g(\underbrace{\varphi(-x)}_{\psi(x)}) \right) \cdot \underline{(-1)} = \\ &= h(x) \cdot g(\psi(x))\end{aligned}$$

für alle $x \in -D_\varphi$ mit $\psi(0) = \varphi(0) = y_0$ Lösung, und wegen der Eindeutigkeitsaussage folgt $\varphi = \psi$, also $D_\varphi = D_\psi = -D_\varphi$ und $\varphi(x) = \psi(x) = \varphi(-x)$ für alle $x \in D_\varphi$.

2.10. Beispiel

(H 03 III 3) Für $b \in \mathbb{R}$ berechne $\varphi_b: J_b \rightarrow \mathbb{R}$ die (eindeutig bestimmte) maximale Lösung des AWP $(*)$ $y' = x \cdot (1 + y^2)$ mit $y(0) = b$.

1.) Man gebe (mit Begründung!) drei wesentliche Eigenschaften von φ_b an, die sich aus der Dgl. $y' = x(1 + y^2)$ ohne Integration ablesen lassen. Es handelt sich um eine Dgl. $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen; dabei ist $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x$, und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(y) = 1 + y^2$, und wegen $g(y) = 1 + y^2 > 0$ für alle $y \in \mathbb{R}$ existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi_b: J_b \rightarrow \mathbb{R}$ des AWP.

* Monotonieverhalten:

Wegen $\varphi_b'(x) = x \cdot (1 + (\varphi_b(x))^2)$ für alle $x \in J_b$ ist $\varphi_b'(x) > 0$ für $x > 0$ sowie $\varphi_b'(x) < 0$ für $x < 0$; damit ist φ_b auf $J_b \cap \mathbb{R}_0^+$ streng monoton steigend sowie auf

$J_b \cap \mathbb{R}_0^-$ streng monoton fallend.

- * Extremstellen Im Hinblick auf das Monotonieverhalten besitzt φ_b genau ein lokales Extremum, nämlich das isoliert lokale Minimum $\tau(0; b)$; insbesondere ist $W\varphi_b \subseteq [b, \infty[$.
- * Symmetrieverhalten Da h eine ungerade Funktion ist, ist die Lösung φ_b eine gerade Funktion.

2.) Man ermittle durch Integration von (*) (in Abhängigkeit von $b \in \mathbb{R}$) die Funktion $\varphi_b: J_b \rightarrow \mathbb{R}$. Man bestimme das maximale Definitionsintervall $J_b \subseteq \mathbb{R}$. Wie verhält sich J_b für $b \rightarrow \pm \infty$

Da $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ohne Nullstelle ist, erhalten wir mit Satz 2.6

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int x dx, \text{ also } \arctan y = \frac{1}{2}x^2 + c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Wegen $y(0) = b$ ist

$$\arctan b = \frac{1}{2} \cdot 0^2 + c \Rightarrow c = \arctan b$$

und damit

$$\arctan y = \frac{1}{2}x^2 + \arctan b, \text{ also } y = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + \arctan b\right)$$

folglich ist

$$\varphi_b: J_b \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_b(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + \arctan b\right), \text{ wobei}$$

$J_b \subseteq \mathbb{R}$ das maximale Definitionsintervall mit $0 \in J_b$ ist.

Wegen

$$\frac{1}{2} \cdot 0^2 + \arctan b = \arctan b \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$



betrachten wir also den Hauptast des Tangens, und J_b besteht aus allen $x \in \mathbb{R}$ mit $-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x^2 + \arctan b < \frac{\pi}{2}$.

Wegen

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{2}x^2 + \arctan b < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \underbrace{-\pi - 2\arctan b}_{< 0} < x^2 < \underbrace{\pi - 2\arctan b}_{> 0}$$

$$\Leftrightarrow x^2 < \pi - 2\arctan b \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\pi - 2\arctan b}$$

ist $J_b =]-\sqrt{\pi - 2\arctan b}, \sqrt{\pi - 2\arctan b}[$,

Wegen $\lim_{b \rightarrow \infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}$ ist $J_b \rightarrow \{0\}$ für $b \rightarrow \infty$

und wegen $\lim_{b \rightarrow -\infty} \arctan b = -\frac{\pi}{2}$ ist $J_b \rightarrow]-\sqrt{2\pi}, \sqrt{2\pi}[$ für $b \rightarrow -\infty$.

3.) Man skizziere für $b \in \{-1, 0, 1\}$ den Graphen von φ_b .

$b = -1$: $\varphi_{-1}:]-\sqrt{\frac{3\pi}{2}}, \sqrt{\frac{3\pi}{2}}[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi_{-1} = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$b = 0$: $\varphi_0:]-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi_0 = \tan\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

$b = 1$: $\varphi_1:]-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi_1 = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$$

