

$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in der Form $\varphi(x) = u(x) \cdot e^{2x^2}$ mit der diffbaren Fkt. $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich

$$\underline{\varphi'(x) = u'(x) \cdot e^{2x^2} + u(x) \cdot e^{2x^2} \cdot (4x)}$$

und damit

$$\underline{u'(x) \cdot e^{2x^2} + u(x) \cdot e^{2x^2} \cdot 4x = 4x \cdot \cancel{u(x) e^{2x^2}} + (1-x) e^{4x}},$$

also

$$u'(x) = \underbrace{(1-x) e^{4x}}_{b(x)} \cdot \underbrace{e^{-2x^2}}_{e^{-A(x)}} = (1-x) e^{4x-2x^2}$$

Mit $g(x) = 4x - 2x^2$ und $g'(x) = 4 - 4x = 4(1-x)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \int (1-x) e^{4x-2x^2} dx &= \frac{1}{4} \int g'(x) \cdot e^{g(x)} dx = \frac{1}{4} e^{g(x)} + C \\ &= \frac{1}{4} e^{4x-2x^2} + C; \end{aligned}$$

damit ist $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = \frac{1}{4} e^{4x-2x^2} + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und schließlich $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = u(x) \cdot e^{2x^2} = \frac{1}{4} e^{4x} + c \cdot e^{2x^2}$

Nun bestimmen wir mit Hilfe des Anfangswerts $y(1) = 0$ die noch freie Konstante $c \in \mathbb{R}$; wegen $0 = \varphi(1) = \frac{1}{4} e^4 + c \cdot e^2$ ist $c = -\frac{1}{4} e^2$, also

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{1}{4} e^{4x} - \frac{1}{4} e^{2+2x^2}$$

3.11.05

2.) (H 03 I 4) Man bestimme alle stetig diffb. Funktionen:

$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, welche der Gleichung

$$\int_0^x t y(t) dt = x^2 + y(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ lösen}$$

(Hinweis: Man differenziere zunächst die Gleichung!)

Für jede stetig diffbare Funktion $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\int_0^x ty(t) dt = x^2 + y(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$xy(x) = 2x + y'(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R};$$

wegen $\int_0^0 ty(t) dt = 0^2 + y(0)$, also $y(0) = 0$ ist sie also

Lösung des AWP $y' = xy - 2x$ mit $y(0) = 0$ Umgekehrt erfüllt jede Lösung dieses AWP wegen

$$\begin{aligned} \int_0^x ty(t) dt &= \int_0^x (2t + y'(t)) dt = [t^2 + y(t)]_0^x = \\ &= (x^2 + y(x)) - (0^2 + \underbrace{y(0)}_{=0}) = x^2 + y(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ die gegebene Gleichung.

Da $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $A(x) = \frac{1}{2}x^2$, die Stammfunktion von $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a(x) = x$, ist, stellt die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_c(x) = c \cdot e^{A(x)} = c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2},$$

für alle $c \in \mathbb{R}$ die allg. Lösung der hom. lin. Dgl. $y' = xy$ dar, ferner ist die konstante Funktion $\varphi_p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_p(x) = 2$, wegen

$$x \cdot \varphi_p(x) - 2x = x \cdot 2 - 2x = 0 = \varphi_p'(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ eine partikuläre Lösung der inh. lin. Dgl. $y' = xy - 2x$ dar; damit ist die Gesamtheit der Funktionen

$$\varphi = \varphi_p + \varphi_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = 2 + c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$

deren allgemeine Lösung. Wegen

$$\varphi(0) = 0 \iff 2 + c \cdot e^0 = 0 \iff c = -2$$

löst genau dann die Funktion $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 2 - 2e^{\frac{1}{2}x^2} = 2(1 - e^{\frac{1}{2}x^2})$ das AWP und damit die gegebene Gleichung.

Alternativ:

1.) Jede stetig diffb. Funktion $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit
 $\int_0^x t \varphi(t) dt = x^2 + \varphi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, löst die
inhomogene lineare Dgl. $y' = xy - 2x$

2.) Damit ist φ eine maximale Lösung dieser Dgl, es
ist also $\varphi(x) = 2 + c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

3.) Probe durch Einsetzen von φ in die Integralgleichung

$$\int_0^x t \cdot \varphi(t) dt = x^2 + \varphi(x)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x \underbrace{t \cdot (2 + c \cdot e^{\frac{1}{2}t^2})}_{2t + c t e^{\frac{1}{2}t^2}} dt = x^2 + 2 + c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left[t^2 + c \cdot e^{\frac{1}{2}t^2} \right]_0^x = x^2 + 2 + c \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + c e^{\frac{1}{2}x^2}) - (0 + e^0 c) = x^2 + 2 + c e^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$\Leftrightarrow -c = 2$$

$$\Leftrightarrow c = -2$$

2.4. Definition

Seien $J, I \subseteq \mathbb{R}$ zwei Intervalle sowie $h: J \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: I \rightarrow \mathbb{R}$
zwei stetige Funktionen. Dann heißt

$$y' = h(x) \cdot g(y) \quad \text{für alle } x \in J, y \in I$$

eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen, damit ist

$U = J \times I \subseteq \mathbb{R}^2$ sowie $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = h(x) \cdot g(y)$.

Speziell ergibt sich

1.) Für $J = \mathbb{R}$ und $g(y) = 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$ ist $y' = h(x)$

für $x \in J$, die allg. Lösung ist die Menge $\int h(x) dx$
der Stammfunktionen von h .

2.) Für $J = \mathbb{R}$ und $g(y) = y$ für alle $y \in \mathbb{R}$ ist $y' = h(x) \cdot y$ für $x \in J$ eine homogene lin. Dgl.

3.) Für $J = \mathbb{R}$ und $h(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $y' = g(y)$, man nennt diese eine autonome Dgl.

2.5. Beispiel

(H 04 II 6) Man bestimme die maximale Lösung des AWP

$$y' = (xy)^{\frac{1}{2}} \text{ für } x > 0, y > 0 \text{ mit } y(1) = 1.$$

Es handelt sich um eine Dgl. $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen, dabei ist $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^{\frac{1}{2}}$, und $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $g(y) = y^{\frac{1}{2}}$. Wegen $g(y) = y^{\frac{1}{2}} \neq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^+$ können wir

$$\frac{y'}{g(y)} = h(x) \quad \text{bzw.} \quad y^{\frac{1}{2}} \cdot y' = x^{\frac{1}{2}}$$

schreiben, durch Integration ergibt sich mit Hilfe der Substitutionsregel (über $y' = \frac{dy}{dx}$ bzw. $dy = y' dx$)

$$\int \frac{y'}{g(y)} dx = \int h(x) dx \quad \text{und damit} \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x) dx$$

in unserem Beispiel also

$$\int y^{-\frac{1}{2}} y' dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx \quad \text{und damit} \quad \int y^{-\frac{1}{2}} dy = \int x^{\frac{1}{2}} dx;$$

es ergibt sich $\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$, also $2y^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$ und

$$y = \left(\frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{c}{2} \right)^2 \quad \text{für ein } c \in \mathbb{R}$$

Wegen $y(1) = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot 1^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \cdot 1^{\frac{3}{2}} + c \Leftrightarrow c = \frac{4}{3}$ ist

$y: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $y(x) = \left(\frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} \right)^2$ die maximale Lösung des gestellten AWP, was durch die Probe

$$y' = 2 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} \right)}_{y^{\frac{1}{2}}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \right)}_{x^{\frac{1}{2}}} = (xy)^{\frac{1}{2}}$$

2.6. Satz

Seien $J, J \subseteq \mathbb{R}$ zwei offene Intervalle mit $(x_0, y_0) \in J \times J$ sowie $h: J \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, wobei g als nullstellenfrei vorausgesetzt sei. Dann besitzt das AWP

$$y' = h(x) \cdot g(y) \quad \text{mit } y(x_0) = y_0$$

eine eindeutig bestimmte maximale Lösung $\varphi: D_\varphi \rightarrow \mathbb{R}$. Diese erhält man dadurch, daß man die Gleichung

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x) dx + c$$

nach y auflöst und die Konstante $c \in \mathbb{R}$ der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ anpaßt; dabei kann das maximale Definitionsintervall D_φ allerdings echt in J enthalten sein.

2.7. Beispiel

(F 94 I 7) Man löse das AWP $y' = 2xy^2$ mit $y(1) = a$ in den Fällen $a = \frac{1}{2}$ und $a = -\frac{1}{2}$ und bestimme jeweils das max. Definitionsintervall. Es handelt sich um die Dgl. $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen mit der stetigen Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = 2x$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(y) = y^2$, wobei g eine Nullstelle $y = 0$ besitzt; es ist also $y' = f(x, y)$ mit

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = h(x) \cdot g(y) = 2xy^2.$$

f ist stetig und bzgl. y partiell db, und die partielle Ableitung

$$\partial_y f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \partial_y f(x, y) = 2x \cdot 2y = 4xy, \text{ ist wiederum stetig;}$$

damit besitzt jedes AWP $y' = f(x, y)$ mit $y(x_0) = y_0$ eine eindeutig bestimmte Lösung.

zunächst ist die konstante Funktion $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(x) = 0$, eine max. Lösung der Dgl. Da jede andere maximale Lösung $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

höheren gemeinsamen Punkt mit ψ haben kann, verläuft der Graph Γ_φ entweder komplett oberhalb oder komplett unterhalb der x -Achse, wir können also die Dgl. getrennt nach der oberen Halbebene $U_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ und der unteren Halbebene $U_2: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$ untersuchen.



Da g auf $\mathbb{R}^+$ und $\mathbb{R}^-$ ohne Nullstellen ist, erhalten wir mit Satz 2.6

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x) dx, \text{ also } \int \frac{dy}{y^2} = \int 2x dx, \text{ also}$$

$$-\frac{1}{y} = x^2 + c \quad \text{für eine Konstante } c \in \mathbb{R}.$$