

von einem Anfangswert $(x_0; y_0)$, in jedem Punkt durch das jeweilige Linienelement die weitere Richtung gewiesen; hier seien $x_0 = 0$ sowie $y_0 \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

- 4.) Die maximalen Lösungen der Dgl $y' = -2xy$ für $x, y \in \mathbb{R}$ sind $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = c \cdot e^{-x^2}$ mit Konstanten $c \in \mathbb{R}$.
Das AWP $y' = -2xy$ mit $y(0) = y_0$ besitzt also die eindeutige Lösung $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = y_0 \cdot e^{-x^2}$

25.10.05

1.5 Satz

Seien $U \subseteq \mathbb{R}^2$ die nichtleere Teilmenge mit $(x_0, y_0) \in U$ sowie $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion.

- 1.) (Existenzsatz von Peano) Ist f stetig, so existiert (mind.) eine maximale Lösung $\varphi: D_\varphi \rightarrow \mathbb{R}$ des AWP $y' = f(x, y)$ mit $y(x_0) = y_0$.
- 2.) (Eindeutigkeitsatz) Ist f darüber hinaus bzgl. y partiell db und $\partial_y f: U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist die Lösung φ von 1) sogar eindeutig bestimmt.

1.6 Beispiel

(H 95 III 5) Gegeben sei (D) $y' = \cos\left(\frac{\pi}{2} y^2\right)$. Es ist also $U = \mathbb{R}^2$ mit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} y^2\right)$, damit ist f stetig und nach y partiell diffbar, und für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\partial_y f(x, y) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} y^2\right) \cdot (\pi y); \text{ also ist auch } \partial_y f \text{ stetig.}$$

Nach dem Existenz- und Eindeigkeitsatz existiert für

§ 2 Lösungsverfahren

2.1. Definition

Sei $\emptyset \neq J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall sowie $a, b: J \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Dann heißt $y' = a(x) \cdot y + b(x)$ eine lineare Dgl. erster Ordnung, es ist $U = J \times \mathbb{R}$ und $f: U \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = a(x) \cdot y + b(x)$.

Ist b die Nullfunktion, so heißt die lin. Dgl.

$$y' = a(x) \cdot y \quad \text{bzw.} \quad y' - a(x)y = 0$$

homogen, anderenfalls nennt man die lin. Dgl.

$$y' = a(x) \cdot y + b(x) \quad \text{bzw.} \quad y' - a(x)y = b(x)$$

inhomogen (mit der rechten Seite b)

2.2. Satz

Sei $\emptyset \neq J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall sowie $a, b: J \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, ferner sei $A: J \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von a .

1.) Die allgemeine Lösung der homogenen lin. Dgl. $y' = a(x) \cdot y$ besteht genau aus den Funktionen $\varphi_c: J \rightarrow \mathbb{R}, \varphi_c(x) = c \cdot e^{A(x)}$, mit $c \in \mathbb{R}$.

2.) Ist $\varphi_p: J \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der inhomogenen lin. Dgl. $y' = a(x)y + b(x)$ so besteht deren allg. Lösung genau aus den Funktionen

$\varphi_p + \varphi_c: J \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \varphi_p(x) + c \cdot e^{A(x)}$, mit $c \in \mathbb{R}$.

3.) Jede maximale Lösung der inhomogenen lin. Dgl.

$y' = a(x)y + b(x)$ besitzt die Form $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$,

$\varphi(x) = u(x) \cdot e^{A(x)}$, wobei $u: J \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu $u': J \rightarrow \mathbb{R}, u'(x) = b(x) \cdot e^{-A(x)}$ ist.

(„Variation der Konstanten“)

Beweis:

1.) analog zu Beispiel 1.3 (2) $[y' = y]$

2.) analog zu lin. Gleichungssystemen $[L = y_p + L_0]$

3.) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\varphi'(x) = u'(x) \cdot e^{A(x)} + u(x) \cdot e^{A(x)} \cdot A'(x)$;

damit ist φ genau dann Lösung von

$y' = a(x)y + b(x)$, wenn $u'(x) \cdot e^{A(x)} + u(x) \cdot e^{A(x)} \cdot a(x)$

$= a(x) \cdot u(x) \cdot e^{A(x)} + b(x)$ gilt also im Falle

$u'(x) = b(x) \cdot e^{-A(x)}$ für alle $x \in J$.

2.3. Beispiel

1.) (701 II 6). Wie lautet die allg. Lösung von $y' = 4xy$?

Man skizziere die Graphen der Lösungsfunktionen. Es

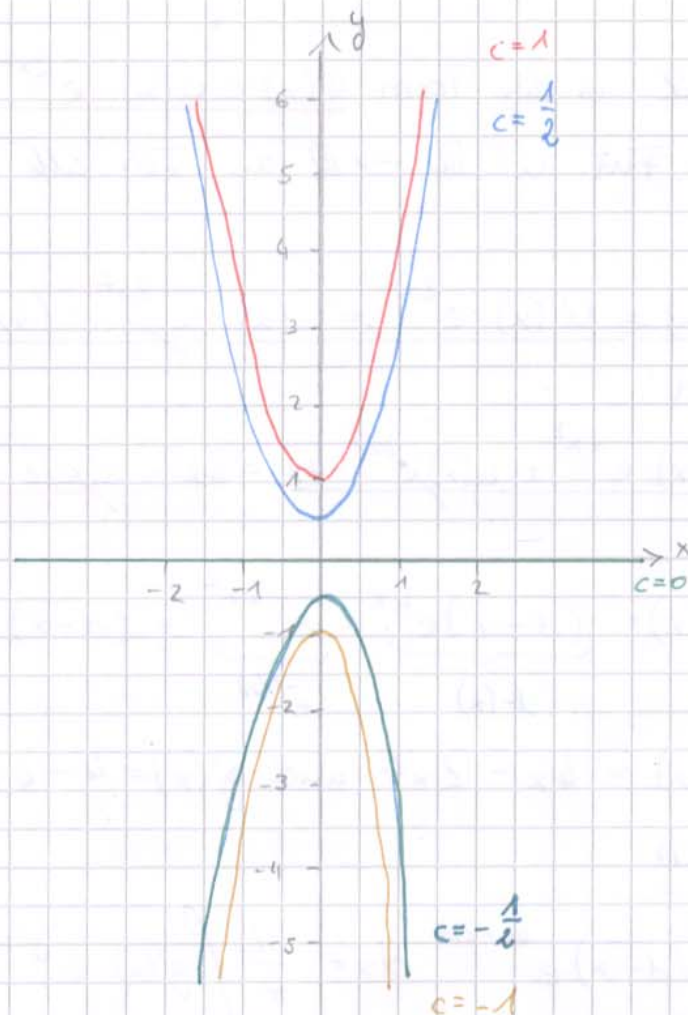
handelt sich um die homogene lin. Dgl. $y' = a(x)y$ mit

der stetigen Funktion $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a(x) = 4x$; damit

ist $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, A(x) = 2x^2$, eine Stammfunktion von a ,

und nach Satz 2.2. (1) ist $\varphi_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi_c(x) = c \cdot e^{2x^2}$,

mit $c \in \mathbb{R}$, die allg. Lösung von $y' = 4xy$.



b) Man gebe die maximale Lösung des AWP $y' = 4xy + (1-x)e^{4x}$ mit $y(1) = 0$ an. Es handelt sich um die inhomogene lin. Dgl. $y' = a(x) \cdot y + b(x)$ mit den stetigen Funktionen: $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a(x) = 4x$, und $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $b(x) = (1-x)e^{4x}$

- * Gelingt es, eine partikuläre Lösung $\varphi_p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zu erhalten, so ist man mit Satz 2.2 (2) fertig; etwa für $\varphi_p(x) = \frac{1}{4}e^{4x}$ ist $\varphi_p'(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{4x} \cdot 4 = e^{4x}$ und damit $4x \varphi_p(x) + (1-x)e^{4x} = xe^{4x} + (1-x)e^{4x} = e^{4x} = \varphi_p'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Damit ist $\varphi_p + \varphi_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{4}e^{4x} + c \cdot e^{x^2}$, mit $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.

- * Ausonsten führt der Ansatz der Variation der Konstanten zum Ziel; wir sehen dazu die Lösung

$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in der Form $\varphi(x) = u(x) \cdot e^{2x^2}$ mit der diffbaren Fkt. $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich

$$\underline{\varphi'(x) = u'(x) \cdot e^{2x^2} + u(x) \cdot e^{2x^2} \cdot (4x)}$$

und damit

$$\underline{u'(x) \cdot e^{2x^2} + u(x) \cdot e^{2x^2} \cdot 4x = 4x \cdot u(x) \cdot e^{2x^2} + (1-x)e^{4x}},$$

also

$$u'(x) = \underbrace{(1-x)e^{4x}}_{h(x)} \cdot \underbrace{e^{-2x^2}}_{e^{-A(x)}} = (1-x)e^{4x-2x^2}$$

Mit $g(x) = 4x - 2x^2$ und $g'(x) = 4 - 4x = 4(1-x)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \int (1-x)e^{4x-2x^2} dx &= \frac{1}{4} \int g'(x) \cdot e^{g(x)} dx = \frac{1}{4} e^{g(x)} + C \\ &= \frac{1}{4} e^{4x-2x^2} + C; \end{aligned}$$

damit ist $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = \frac{1}{4} e^{4x-2x^2} + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und schließlich $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = u(x) \cdot e^{2x^2} = \frac{1}{4} e^{4x} + c \cdot e^{2x^2}$

Nun bestimmen wir mit Hilfe des Anfangswerts $y(1) = 0$ die noch freie Konstante $c \in \mathbb{R}$; wegen $0 = \varphi(1) = \frac{1}{4} e^4 + c e^2$ ist $c = -\frac{1}{4} e^2$, also

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{1}{4} e^{4x} - \frac{1}{4} e^{2+2x^2}$$