

A. Gewöhnliche Differentialgleichungen

§1 Einführung

1.1 Bemerkung

Wir betrachten die folgenden Aufgabenstellungen:

1a) Unter der Lösung der Gleichung $e^{-x} = x$ versteht man eine reelle Zahl $\xi \in \mathbb{R}$ mit $e^{-\xi} = \xi$, also eine Nullstelle der Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x} - x$

- * f ist stetig mit $f(0) = 1 > 0$ und $f(1) = e^{-1} - 1 < 0$

und nach dem Nullstellensatz besitzt f eine Nullstelle $\xi \in]0, 1[$, damit ist die Existenz von (mind.) einer Lösung der Gleichung $e^{-x} = x$ gezeigt

- * f ist diffbar mit $f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$; damit ist f streng monoton fallend und besitzt demnach höchstens eine Nullstelle. Damit ist auch die Eindeutigkeit von ξ als Lösung der Gleichung $e^{-x} = x$ nachgewiesen.

- * Die gegebene Gleichung läßt sich nicht elementar nach x auflösen, die eindeutig bestimmte Lösung ξ kann aber (etwa durch fortgesetzte Intervallhalbierung) beliebig genau angenähert werden.

b) Dagegen können die Lösungen der Gleichung $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ explizit berechnet werden, wegen $x^3 - 2x^2 - 3x = x \cdot (x^2 - 2x - 3) = x \cdot (x - 3)(x + 1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ sind $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$ die drei Lösungen der gegebenen Gleichung.

2.) Unter der Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 &= 11 \end{aligned} \quad (G)$$

mit der Koeffizientenmatrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ und der rechten Seite $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ versteht man einen Spaltenvektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit $A \cdot x = b$. Wegen

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) = (A' | b')$$

$$\text{ist } L = \left\{ \begin{pmatrix} -2 + \lambda \\ 3 - 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Gesamtheit aller Lösungen von (G). Dabei besagt bereits die Theorie, daß wegen $\text{Rang}(A|b) = \text{Rang}(A)$ die Existenz einer Lösung gesichert ist; da x_3 eine freie Unbestimmte ist, gibt es sogar unendlich viele Lösungen, es kann also keine Eindeutigkeit vorliegen.

3.) Gesucht ist eine differenzierbare Funktion $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem möglichst großen Definitionsintervall $D_f \subseteq \mathbb{R}$ und einem Wertebereich $W_f \subseteq \mathbb{R}^+$, für die die Beziehung

$$p'(x) = \frac{x}{p(x)} \text{ für alle } x \in D_p \text{ erfüllt ist.}$$

Die gesuchte Funktion $p: D_p \rightarrow \mathbb{R}$ soll also

- * wegen $G_p \subseteq D_p \times W_p \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ in der oberen Halbebene verlaufen
- * für alle $x \in D_p$ der Gleichung $y' = \frac{x}{y}$ genügen, in der neben der Variable x die Funktion $y = p(x)$ selbst und deren Ableitungsfunktion $y' = p'(x)$ auftreten

Man fragt also nach der Lösung p der Differentialgleichung $y' = \frac{x}{y}$ mit $x \in \mathbb{R}$ (also $D_p \subseteq \mathbb{R}$) und $y \in \mathbb{R}^+$ (also $W_p \subseteq \mathbb{R}^+$)

Für eine Lösung $p: D_p \rightarrow \mathbb{R}$ dieser Differentialgleichung muß also $2 p(x) \cdot p'(x) = 2x$ für alle $x \in D_p$ gelten, da D_p als ein Intervall vorausgesetzt ist, folgt

$$\int 2 p(x) \cdot p'(x) dx = \int 2x dx \quad \text{bzw.} \quad \int 2y y' dx = \int 2x dx$$

und unter Verwendung der Substitutionsregel dann

$$(p(x))^2 = x^2 + c \quad \text{bzw.} \quad y^2 = x^2 + c$$

mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}$. Wegen $W_p \subseteq \mathbb{R}^+$ ergibt sich dann

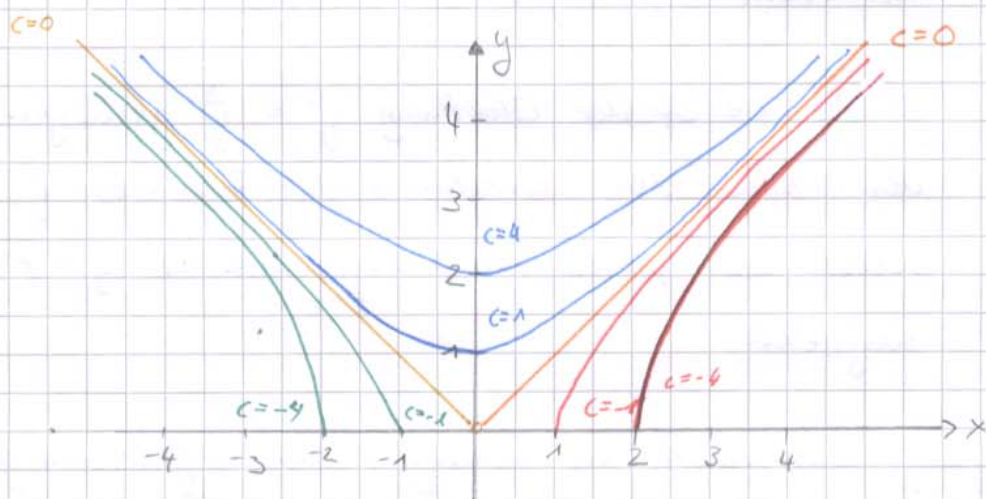
$$y = p(x) = \sqrt{x^2 + c} \quad \text{für alle } x \in D_p$$

mit

$$D_p = \begin{cases} \mathbb{R} & , \text{ für } c > 0 \\ \mathbb{R}^- \text{ oder } \mathbb{R}^+ & , \text{ für } c = 0 \\]-\infty; -\sqrt{-c}[\text{ oder }]\sqrt{-c}; \infty[& , \text{ für } c < 0 \end{cases}$$

Die Probe $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+c}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+c}} = \frac{x}{\varphi(x)}$

für alle $x \in \mathbb{D}_\varphi$ bestätigt, daß die oben ermittelten Funktionen $\varphi: \mathbb{D}_\varphi \rightarrow \mathbb{R}$ tatsächlich Lösungen der Differentialgleichung $y' = \frac{x}{y}$ sind.



Die Differentialgleichung $y' = \frac{x}{y}$ besitzt also unendlich viele Lösungen mit unterschiedlichen Definitionsbereichen und „sehr verschiedenen“ Graphen (Halbgeraden und Hyperbeläste), man beobachtet aber, daß für jeden Punkt (x_0, y_0) der oberen Halbebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ genau eine Lösung φ von $y' = \frac{x}{y}$ mit $\varphi(x_0) = y_0$ existiert:

- * für $(x_0, y_0) = (-2, 3)$ ist $c = 5$, also $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \sqrt{x^2 + 5}$
- * für $(x_0, y_0) = (-2, 2)$ ist $c = 0$, also $\varphi: \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \sqrt{x^2} = -x$
- * für $(x_0, y_0) = (-2, 1)$ ist $c = -3$, also $\varphi:]-\infty, -\sqrt{3}[\rightarrow \mathbb{R}$,
 $\varphi(x) = \sqrt{x^2 - 3}$