

1) Untersuchung von f auf ∂D :

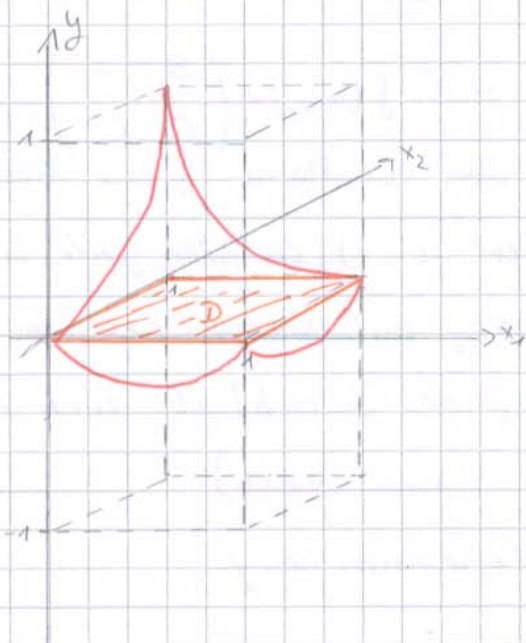
$$* f(t, 0) = t^2 - t \quad (\text{untere Quadratseite}) \quad (t - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$$

$$* f(t, 1) = t^2 - 2t + 1 \quad (\text{obere Quadratseite}) \quad (t - 1)^2$$

$$* f(0, t) = t^2 \quad (\text{linke "}) \quad t^2$$

$$* f(1, t) = t^2 - t \quad (\text{rechte "}) \quad (t - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$$

15.07.05



Damit nimmt f auf ∂D Werte zwischen $-\frac{1}{4}$ und 1 an, dabei liegt das Maximum 1 bei $(0, 1)$ sowie das Minimum $-\frac{1}{4}$ bei $(\frac{1}{2}, 0)$ und $(1, \frac{1}{2})$ vor.

2) $a \in \mathcal{D}$, damit folgt aber $\text{grad } f(a) = 0$.

Wegen $\partial_1 f(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 - 1$ und $\partial_2 f(x_1, x_2) = 2x_2 - x_1$ für alle

$$x = (x_1, x_2) \in \mathcal{D} \text{ gilt } \text{grad } f(a_1, a_2) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{aligned} 2a_1 - a_2 &= 1 \\ -a_1 + 2a_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow -a_1 + 2a_2 = 0 \Leftrightarrow (a_1, a_2) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), \text{ dabei ist } 3a_2 = 1$$

$$f(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

Also: Der Vergleich der Funktionswerte an den vier in Frage kommenden Punkten liefert $p = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ und $f(p) = -\frac{1}{3}$ und $q = (0, 1)$ mit $f(q) = 1$

12.9 Definition und Beispiele

- 1.) Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sowie $a \in U$ mit $U \cap (a) \subseteq U$; ferner sei $u \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor der Länge $\|u\| = 1$. In Verallgemeinerung von Definition 12.2 (1) heißt f im Punkt $a \in U$ differenzierbar in Richtung u , wenn die Funktion $g_u:]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}$, $g_u(t) = f(a + tu)$, an der Stelle $t=0$ differenzierbar ist, also der Grenzwert $\partial_u f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hu) - f(a)}{h}$ existiert. Dieser Grenzwert heißt Richtungsableitung von f im Punkt $a \in U$ in Richtung u und gibt die Steigung des Graphen G_f im Punkte $a \in U$ in Richtung u an.
- 2.) Für $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, ist also $g_u(t) = f(a + tu) = f(a_1 + tu_1, a_2 + tu_2) = (a_1 + tu_1)^2 + (a_2 + tu_2)^2$ und damit $g_u'(t) = 2(a_1 + tu_1) \cdot u_1 + 2(a_2 + tu_2) \cdot u_2$ für alle $t \in \mathbb{R}$, insbesondere also $\partial_u f(a) = g_u'(0) = 2a_1 u_1 + 2a_2 u_2 = \text{grad } f(a) \cdot u$.
- Speziell für $u = e_1$ ergibt sich die erste partielle Ableitung $\partial_1 f(a)$, und für $u = e_2$ die zweite partielle Ableitung $\partial_2 f(a)$.
- 3.) Für $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$ gilt im Punkte $a = (0,0)$ also $\frac{f(a + hu) - f(a)}{h} = \frac{1}{h} f(hu) = \frac{1}{h} \cdot f(hu_1, hu_2) = \frac{1}{h} \cdot \frac{(hu_1) \cdot (hu_2)^2}{(hu_1)^2 + (hu_2)^2} = \frac{h^3 \cdot u_1 u_2^2}{h^3 \cdot (u_1^2 + u_2^2)} = u_1 u_2^2$ für alle $h \neq 0$ und damit $\partial_u f(0,0) = u_1 u_2^2$; speziell für $u = e_1$ bzw. $u = e_2$ ergibt sich $\partial_1 f(0,0) = 0$ bzw. $\partial_2 f(0,0) = 0$, damit sind die beiden Koordinatenachsen Tangenten an G_f im Punkt $(0,0)$. Ab alle anderen Tangenten liegen aufgrund von

$\partial_u f(0,0) \neq 0$ für $u \neq \pm e_1, \pm e_2$ nicht in der x_1 - x_2 -Ebene.

12.10. Bemerkung

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

- 1.) Für alle $a \in U$ und $u \in \mathbb{R}^n$ mit $\|u\| = 1$ existiert die Richtungsableitung von f im Punkte $a \in U$ in Richtung u , und es gilt $\partial_u f(a) = \text{grad } f(a) \circ u$.
- 2.) Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt $|\partial_u f(a)| = |\text{grad } f(a) \circ u| \leq \|\text{grad } f(a)\| \|u\| = \|\text{grad } f(a)\|$; dabei gilt $|\partial_u f(a)| = \|\text{grad } f(a)\|$ genau dann, wenn $\text{grad } f(a)$ und u linear abhängig sind. Damit weist der Gradient $\text{grad } f(a)$ in Richtung des steilsten Anstiegs von f im Punkte a und dieser ist betragsmäßig $\|\text{grad } f(a)\|$.

- 3.) Die Funktion $f: K_r(0,0) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}$ ist stetig partiell differenzierbar mit $\partial_1 f(x_1, x_2) = \frac{-2x_1}{2\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}} = -\frac{x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}}$ und analog $\partial_2 f(x_1, x_2) = -\frac{x_2}{\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}}$, also $\text{grad } f(x_1, x_2) = \left(-\frac{x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}}, -\frac{x_2}{\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}} \right) = -\frac{1}{\sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}} \cdot (x_1, x_2) = -\frac{x}{f(x)}$ für alle $x = (x_1, x_2) \in K_r(0,0)$.

In jedem Punkt $a = (a_1, a_2) \in K_r(0,0)$ ist der steilste Anstieg von f in Richtung $-\frac{a}{f(a)}$, also in Richtung auf den Ursprung, speziell im Punkt $a = (0,0)$ ist $\text{grad } f(0,0) = (0,0)$, die Funktion besitzt dort ihr globales Maximum.

12.11. Definition und Bemerkung

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig partiell differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sowie $a \in U$.

- 1.) Die Hyperebene $T_f(a) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y = f(a) + \text{grad} f(a) \circ (x - a) \}$ heißt Tangentialehyperebene an Γ_f im Punkte $(a, f(a))$; für diese gilt $y - \text{grad} f(a) \circ x = f(a) - \text{grad} f(a) \circ a$ und damit
$$\frac{(-\text{grad} f(a), 1) \circ (x, y) + (\text{grad} f(a) \circ a - f(a))}{\|(\text{grad} f(a), 1)\|} = 0$$

Damit ist $(-\text{grad} f(a), 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ein Normalenvektor von $T_f(a)$, und $\frac{(-\text{grad} f(a), 1)}{\|(\text{grad} f(a), 1)\|}$ heißt Normaleneinheitsvektor von f im Punkte $(a, f(a))$.

- 2.) Es ist $\ell_n(a) = (a, f(a)) + \mathbb{R}(u, \text{d}_u f(a)) = \mathbb{R}^{n+1}$ die Tangente an Γ_f im Punkt $(a, f(a))$ in Richtung u , für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $x = a + \lambda u$ und $y = f(a) + \lambda \text{d}_u f(a)$ und damit $f(a) + \text{grad} f(a) \circ (x - a) = f(a) + \text{grad} f(a) \circ (\lambda u) = f(a) + \lambda \text{d}_u f(a) = y$.

- 3.) Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2$, ist (als Polynomfunktion) stetig partiell differenzierbar, und für alle $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt $\partial_1 f(x_1, x_2) = 10x_1 + 8x_2$ und $\partial_2 f(x_1, x_2) = 8x_1 + 6x_2$. Für den Punkt $a = (1, -1) \in \mathbb{R}^2$ gilt also $\text{grad} f(1, -1) = (2, 2)$ sowie $f(1, -1) = 0$, und wir erhalten:

$$\begin{aligned} * T_f(1, -1) &= \{ (x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3 \mid y = f(1, -1) + \text{grad} f(1, -1) \circ (x_1 - 1, x_2 + 1) \} \\ &= \{ (x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 + 2(x_1 - 1) + 2(x_2 + 1) \} = \end{aligned}$$

$$= \{ (x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 2x_2 - y = 0 \} \text{ als Tangentialebene}$$

$$* \text{ sowie den Normaleneinheitsvektor } n(1, -1, 0) = \frac{(-\operatorname{grad} f(1, -1), 1)}{\|(-\operatorname{grad} f(1, -1), 1)\|} =$$

$$= \frac{(-2, -2, 1)}{\|(-2, -2, 1)\|} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{ am Af im Punkt } (1, -1, 0)$$