

* Hess $f(a_2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ indefinit $\Rightarrow a_2$ Sattelpunkt

* Hess $f(a_3) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ indefinit $\Rightarrow a_3$ "Chipslettenpunkt" $\hat{=}$ Sattelpunkt

* Hess $f(a_4) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$ negativ definit

$\Rightarrow a_4$ isoliertes lokales Maximum.

4.) (FS6 III 3) Man bestimme die lokalen Extrema der

08.07.05

Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 2x_1^3 - x_1x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2$.

f ist (als Polynomfunktion) beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und für alle $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

* $\partial_1 f(x_1, x_2) = 6x_1^2 - x_2^2 + 10x_1$ und

$\partial_2 f(x_1, x_2) = -2x_1x_2 + 2x_2$, also

$\text{grad } f(x_1, x_2) = (6x_1^2 - x_2^2 + 10x_1, -2x_1x_2 + 2x_2)$, sowie

* $\partial_1 \partial_1 f(x_1, x_2) = 12x_1 + 10$

$\partial_2 \partial_1 f(x_1, x_2) = -2x_2 = \partial_1 \partial_2 f(x_1, x_2)$

$\partial_2 \partial_2 f(x_1, x_2) = -2x_1 + 2$, also

$(\text{Hess } f)(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 12x_1 + 10 & -2x_2 \\ -2x_2 & -2x_1 + 2 \end{pmatrix}$

Für einen kritischen Punkt $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt $\text{grad } f(x_1, x_2) =$

$= (0, 0) \Rightarrow 6x_1^2 - x_2^2 + 10x_1 = 0$ und $-2x_1x_2 + 2x_2 = 0$

$\Rightarrow 2x_2(-x_1 + 1) = 0$

Fall 1: $x_2 = 0 \Rightarrow 6x_1^2 + 10x_1 = 0 \Rightarrow 2x_1(3x_1 + 5) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0$ oder $x_1 = -\frac{5}{3}$

Fall 2: $x_1 = 1 \Rightarrow 6 - x_2^2 + 10 = 0 \Rightarrow x_2^2 = 16 \rightarrow x_2 = 4$ oder

$x_2 = -4$.

Also: Als kritische Punkte von f kommen nur $a_1 = (0,0)$ und $a_2 = (-\frac{5}{3}, 0)$ sowie $a_3 = (1, 4)$ und $a_4 = (1, -4)$ in Frage; für diese gilt:

* $\text{grad } f(a_1) = (0,0)$ und $\text{Hess } f(a_1) = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ positiv definit
 $\Rightarrow f$ hat in $a_1 = (0,0)$ ein (isoliertes) lokales Minimum.

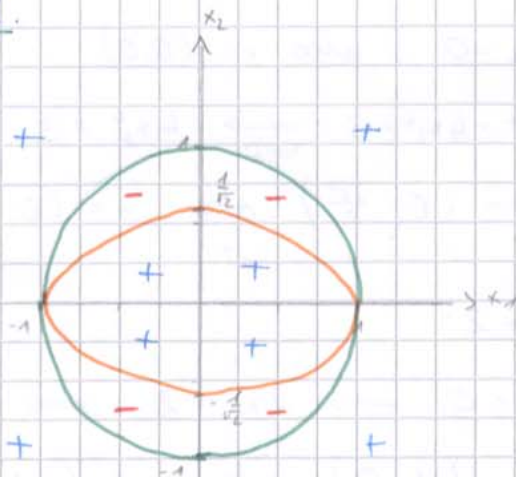
* $\text{grad } f(a_2) = (0,0)$ und $\text{Hess } f(a_2) = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & \frac{16}{3} \end{pmatrix}$ indefinit
 $\Rightarrow f$ hat in $a_2 = (-\frac{5}{3}, 0)$ einen Sattelpunkt

* $\text{grad } f(a_{3/4}) = (0,0)$ und $\text{Hess } f(a_3) = \begin{pmatrix} 22 & -8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$ indefinit
 $\Rightarrow f$ hat in $a_{3/4} = (1, \pm 4)$ einen Sattelpunkt

5.) (H 96 III 4) Gegeben sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + 2x_2^2 - 1, x_1^2 + x_2^2 - 1)$.

a) Man skizziere die Menge $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) = 0\}$ und markiere die Bereiche von $\mathbb{R}^2$, wo $f(x_1, x_2)$ positiv bzw. negativ ist.

Für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt: $f(x_1, x_2) = 0 \iff \underline{x_1^2 + 2x_2^2 = 1}$ oder $\underline{x_1^2 + x_2^2 = 1}$.



b) Man berechne den Gradienten und die Hessematrix von f . f ist (als Polynomfunktion) beliebig oft stetig partiell differenzierbar, und für $x \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$* \partial_1 f(x_1, x_2) = 2x_1 \cdot (x_1^2 + x_2^2 - 1) + (x_1^2 + 2x_2^2 - 1) \cdot 2x_1 = 2x_1(2x_1^2 + 3x_2^2 - 2)$$

$$\partial_2 f(x_1, x_2) = 4x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) + (x_1^2 + 2x_2^2 - 1) \cdot 2x_2 = 2x_2(3x_1^2 + 4x_2^2 - 3)$$

$$\text{also } \text{grad } f(x_1, x_2) = (2x_1(2x_1^2 + 3x_2^2 - 2), 2x_2(3x_1^2 + 4x_2^2 - 3))$$

$$* \partial_1 \partial_1 f(x_1, x_2) = 2(2x_1^2 + 3x_2^2 - 2) + 2x_1 \cdot 4x_1 = 12x_1^2 + 6x_2^2 - 4$$

$$\partial_2 \partial_1 f(x_1, x_2) = 2x_1 \cdot 6x_2 = 12x_1x_2 = 2x_2 \cdot 6x_1 = \partial_1 \partial_2 f(x_1, x_2)$$

$$\partial_2 \partial_2 f(x_1, x_2) = 2 \cdot (3x_1^2 + 4x_2^2 - 3) + 2x_2 \cdot 8x_2 = 6x_1^2 + 24x_2^2 - 6$$

$$\text{also } \text{Hess } f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 + 6x_2^2 - 4 & 12x_1x_2 \\ 12x_1x_2 & 6x_1^2 + 24x_2^2 - 6 \end{pmatrix}$$

c) Man bestimme alle lokalen Extrema

Für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt: $\text{grad } f(x_1, x_2) = (0, 0) \iff$

$$2x_1(2x_1^2 + 3x_2^2 - 2) = 0 \quad \text{und} \quad 2x_2(3x_1^2 + 4x_2^2 - 3) = 0 \iff$$

$$(x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad 2x_1^2 + 3x_2^2 = 2) \quad \text{und} \quad (x_2 = 0 \quad \text{oder} \quad 3x_1^2 + 4x_2^2 = 3)$$

Fall 1: $x_1 = 0$

Fall 1.1: $x_2 = 0$, also $x = (0, 0)$

$$\text{Fall 1.2: } 3x_1^2 + 4x_2^2 = 3 \xrightarrow{x_1=0} 4x_2^2 = 3 \Rightarrow x_2^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x_2 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{also } x = (0, \frac{\sqrt{3}}{2}) \quad \text{oder} \quad x = (0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

Fall 2: $2x_1^2 + 3x_2^2 = 2$

$$\text{Fall 2.1: } x_2 = 0 \Rightarrow 2x_1^2 = 2 \Rightarrow x_1^2 = 1 \Rightarrow x_1 = \pm 1$$

$$\text{also } x = (1, 0) \quad \text{oder} \quad x = (-1, 0)$$

$$\text{Fall 2.2: } \left. \begin{array}{l} 3x_1^2 + 4x_2^2 = 3 \Rightarrow 6x_1^2 + 9x_2^2 = 6 \\ 6x_1^2 + 8x_2^2 = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow x_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_1^2 = 1 \Rightarrow x_1 = \pm 1, \text{ also wieder}$$

$$x = (1, 0) \quad \text{oder} \quad x = (-1, 0)$$

Also: Als kritische Punkte von f kommen nur $a_1 = (0,0)$, $a_2 = (0, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $a_3 = (0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $a_4 = (1,0)$ und $a_5 = (-1,0)$ in Frage, dabei gilt:

* $\text{grad } f(a_1) = (0,0)$ und $\text{Hess } f(a_1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ negativ definit
 $\Rightarrow f$ hat in $a_1 = (0,0)$ ein (isoliertes) lokales Maximum

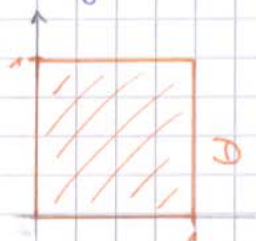
* $\text{grad } f(a_{2/3}) = (0,0)$ und $\text{Hess } f(a_{2/3}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$ positiv definit
 $\Rightarrow f$ hat in $a_{2/3} = (0, \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$ ein (isoliertes) lokales Minimum

* $\text{grad } f(a_{4/5}) = (0,0)$ und $\text{Hess } f(a_{4/5}) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ positiv semidefinit, daher ist über die Matrix keine Aussage möglich.

Aber: gemäß der Skizze von a) enthält jede Kreisscheibe $U_\epsilon(a_{4/5})$ um $a_{4/5}$ mit Radius $\epsilon > 0$ sowohl Punkte x mit $f(x) < 0$ (roter Bereich) als auch Punkte x mit $f(x) > 0$ (blauer Bereich)
 $\Rightarrow a_{4/5}$ kein Extremum von f

6.) (H 98 I 3) Für $f: [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 - x_1$ bestimme man $p, q \in [0,1]^2$ mit $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ für alle $x \in [0,1]^2$.

Nach dem Satz von Weierstraß besitzt die (als Polynomfunktion) stetige Funktion f auf der kompakten Menge $D = [0,1]^2$ ein globales Minimum p und ein globales Maximum q , und es gilt $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ für alle $x \in D$.



Für ein lokales Extremum a von f gibt es zwei Möglichkeiten:

1.) $a \in \partial D$, d.h. a liegt auf einer Seite des Quadrates, oder

2.) $a \in \mathring{D}$ mit $\text{grad } f(a) = (0,0)$

1) Untersuchung von f auf ∂D :

$$* f(t, 0) = t^2 - t \quad (\text{untere Quadratseite})$$

$$* f(t, 1) = t^2 - 2t + 1 \quad (\text{obere Quadratseite})$$

$$* f(0, t) = t^2 \quad (\text{linke "})$$

$$* f(1, t) = t^2 - t \quad (\text{rechte "})$$