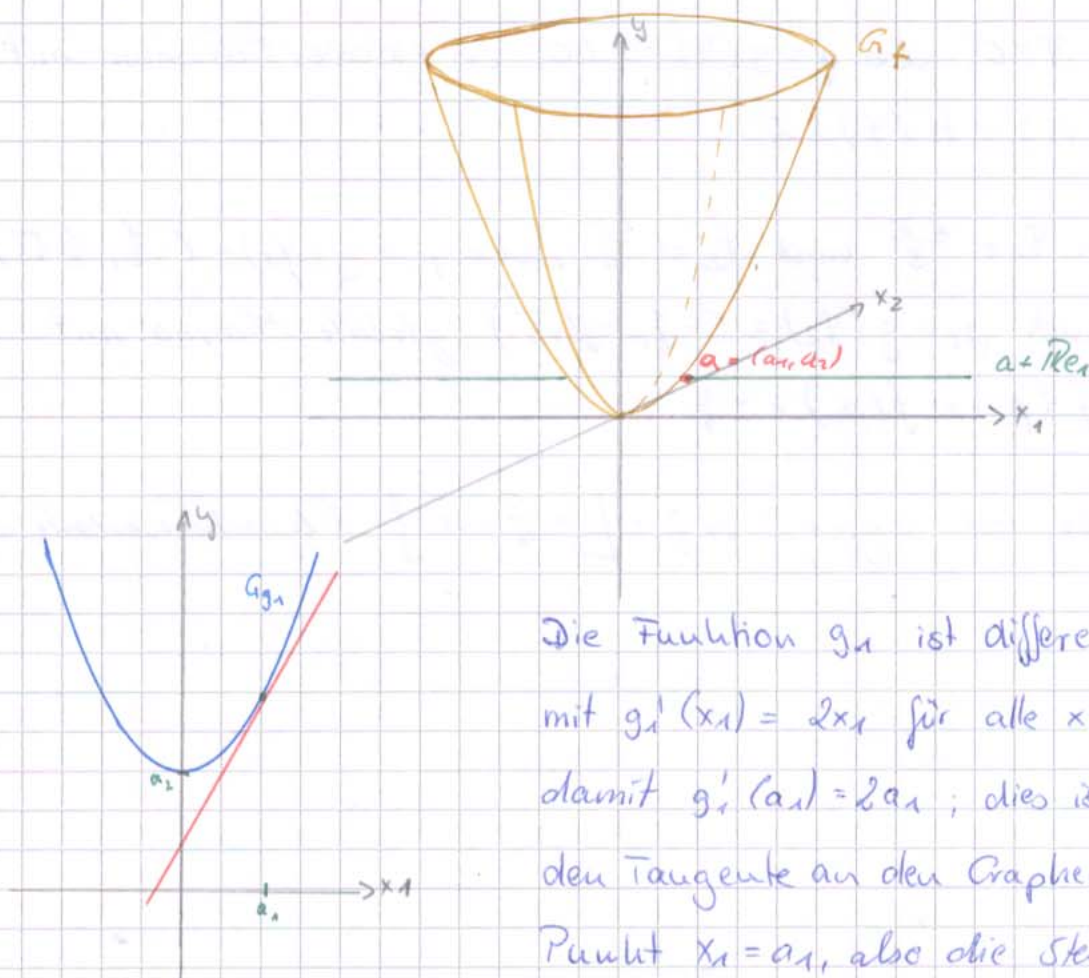


§ 12 Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher

12.1. Bemerkung

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, sowie $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$

- a) Wir betrachten f auf der zur x -Achse parallelen Gerade $a + \mathbb{R} \cdot e_1 = \{(a_1 + \lambda, a_2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(x_1, a_2) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$ durch den Punkt $a \in \mathbb{R}^2$, also die Funktion $g_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1(x_1) = f(x_1, a_2) = x_1^2 + a_2^2$. Der Graph G_{g_1} von g_1 entsteht, indem man den Graphen G_f von f mit der zur x_1 - y -Ebene parallelen Ebene durch den Punkt a schneidet



Die Funktion g_1 ist differenzierbar mit $g_1'(x_1) = 2x_1$ für alle $x_1 \in \mathbb{R}$ und damit $g_1'(a_1) = 2a_1$; dies ist die Steigung der Tangente an den Graphen G_{g_1} im Punkt $x_1 = a_1$, also die Steigung des Graphen G_f im Punkt a in Richtung der x_1 -Achse.

b) Entsprechend gilt $g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g_2(x_2) = f(a_1, x_2) = a_1^2 + x_2^2$, das Verhalten von f auf der zur x_2 -Achse parallelen Geraden $a + \mathbb{R}e_2$ durch den Punkt a wieder, wegen $g_2'(x_2) = 2x_2$ für alle $x_2 \in \mathbb{R}$ ist $g_2'(a_2) = 2a_2$ die Steigung der Tangente an den Graphen G_{g_2} im Punkt $x_2 = a_2$, also die Steigung des Graphen G_f im Punkt a in Richtung der x_2 -Achse.

12.2. Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge sowie $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion

- 1.) Sei $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ mit $K_\varepsilon(a) \subseteq U$ sowie $i \in \{1, \dots, n\}$. f heißt im Punkt $a \in U$ partiell differenzierbar bzgl. der i -ten Koordinatenrichtung, wenn die Funktion $g_i:]a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}, g_i(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$, an der Stelle $x_i = a_i$ differenzierbar ist, also der Grenzwert $\partial_i f(a) = \lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{g_i(x_i) - g_i(a_i)}{x_i - a_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_i(a_i + h) - g_i(a_i)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + he_i) - f(a)}{h}$ existiert.

Dieser Grenzwert heißt i -te partielle Ableitung von f im Punkt $a \in U$ und wird auch $\partial_i f(a)$ oder $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ oder $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$ geschrieben.

- 2.) Die Funktion f heißt partiell differenzierbar, wenn der Grenzwert $\partial_i f(a)$ für alle Punkte $a \in U$ und alle $i \in \{1, \dots, n\}$ existiert. In diesem Fall heißt

- a) die reellwertige Funktion $\partial_i f: U \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \partial_i f(x)$, die i -te partielle Ableitung von f ($1 \leq i \leq n$) sowie

b) die vektorwertige Funktion $\text{grad } f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$,
 $(\text{grad } f)(x) = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x))$ der Gradient
 von f ; für $\text{grad } f$ bzw. $\text{grad } f(x)$ schreibt man auch
 ∇f bzw. $\nabla f(x)$ ("Nabla f ")

3.) Die Funktion f heißt stetig partiell differenzierbar, wenn f
 partiell differenzierbar ist und alle n partiellen Ableitungen
 $\partial_1 f, \dots, \partial_n f$ stetig sind.

12.3. Beispiele

1.) Nach Bemerkung 12.1 ist die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,
 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, partiell differenzierbar mit $\partial_1 f(x_1, x_2) =$
 $= 2x_1$ und $\partial_2 f(x_1, x_2) = 2x_2$ sowie $\text{grad } f(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_2)$
 für alle $x \in \mathbb{R}^2$

2.) Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 2x_1 x_2$, sowie $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

- Die Funktion $g_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1(x_1) = f(x_1, a_2) = 2x_1 a_2$,
 ist differenzierbar mit $g_1'(x_1) = 2a_2$ für alle $x_1 \in \mathbb{R}$,
 damit existiert $\partial_1 f(a) = g_1'(a_1) = 2a_2$.
- Die Funktion $g_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_2(x_2) = f(a_1, x_2) = 2a_1 x_2$, ist
 differenzierbar mit $g_2'(x_2) = 2a_1$ für alle $x_2 \in \mathbb{R}$, damit
 existiert $\partial_2 f(a) = g_2'(a_2) = 2a_1$.

Damit ist f partiell differenzierbar $\partial_1 f(x_1, x_2) = 2x_2$ und
 $\partial_2 f(x_1, x_2) = 2x_1$ sowie $\text{grad } f(x_1, x_2) = (2x_2, 2x_1)$ für alle
 $x \in \mathbb{R}^2$.

3.) Für die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2} \sin x_2$, gilt:

- Es ist $\partial_1 f(x_1, x_2) = (e^{x_1 x_2} \cdot x_2) \cdot \sin x_2 = e^{x_1 x_2} \cdot x_2 \sin x_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$
- Es ist $\partial_2 f(x_1, x_2) = (e^{x_1 x_2} x_1) \sin x_2 + e^{x_1 x_2} \cdot \cos x_2 = e^{x_1 x_2} (x_1 \sin x_2 + \cos x_2)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$

Damit ist f partiell differenzierbar mit dem Gradienten

$$\text{grad } f(x_1, x_2) = (e^{x_1 x_2} x_2 \sin x_2, e^{x_1 x_2} (x_1 \sin x_2 + \cos x_2)) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^2$$

4.) Für die Funktion $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2} = e^{x_2 \ln x_1}$, gilt:

- Es ist $\partial_1 f(x_1, x_2) = e^{x_2 \ln x_1} \cdot (x_2 \cdot \frac{1}{x_1}) = x_1^{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_1} = x_2 \cdot x_1^{x_2-1}$

(über die Kettenregel) bzw. $\partial_1 f(x_1, x_2) = x_2 \cdot x_1^{x_2-1}$
(Ableitung der Potenzfunktion $g_1(x_1) = x_1^{x_2}$ mit festem Exponenten x_2) für alle $x \in \mathbb{R}^2$.

- Es ist $\partial_2 f(x_1, x_2) = e^{x_2 \ln x_1} \cdot \ln x_1 = x_1^{x_2} \cdot \ln x_1$ (Kettenregel) bzw. $\partial_2 f(x_1, x_2) = x_1^{x_2} \cdot \ln x_1$ (Ableitung der allg. Exponentialfunktion $g_2(x_2) = x_1^{x_2}$ mit fester Basis x_1) für alle $x \in \mathbb{R}^2$.

Damit ist f partiell differenzierbar mit $\text{grad } f(x_1, x_2) = (x_2 x_1^{x_2-1}, x_1^{x_2} \ln x_1)$

5.) Für die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, gilt:

- Für alle $x = (x_1, x_2) \neq (0, 0)$ ist $x_1^2 + x_2^2 > 0$, und aus der Differenzierbarkeit der Wurzelfunktion auf $\mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} \text{folgt mit der Kettenregel } \partial_1 f(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cdot 2x_1 = \\ &= \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \text{ und } \partial_2 f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cdot 2x_2 = \\ &= \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}. \end{aligned}$$

- Für $a = (0,0)$ sind $g_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_1(x_1) = f(x_1, 0) = \sqrt{x_1^2 + 0^2} = \sqrt{x_1^2} = |x_1|$, und entsprechend $g_2(x_2) = f(0, x_2) = \sqrt{0^2 + x_2^2} = \sqrt{x_2^2} = |x_2|$, im Punkt 0 nicht differenzierbar; damit existiert weder $\partial_1 f(0,0)$ noch $\partial_2 f(0,0)$.

Damit ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ partiell differenzierbar mit $\text{grad } f(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \cdot (x_1, x_2) = \frac{x}{f(x)}$ für alle $x \neq 0$

6) Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{2x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & , (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & , (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$

ist zunächst für alle $x \neq 0$ partiell differenzierbar mit $\partial_1 f(x_1, x_2) =$

$$= \frac{(x_1^2 + x_2^2) \cdot 2x_2 - 2x_1 x_2 \cdot 2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{2x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} =$$

$$= \frac{2x_2(x_2^2 - x_1^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \text{ sowie analog } \partial_2 f(x_1, x_2) = \frac{2x_1(x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2};$$

ferner ist $\partial_1 f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$, sowie

analog $\partial_2 f(0,0) = 0$. Damit ist f zwar partiell differenzierbar, gemäß Beispiel 11.16 (3) aber im Punkt $a=0$ unstetig.