

Wegen $\lim_{h \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{h}, \frac{1}{h^2} \right) = (0,0)$ und $\lim_{h \rightarrow \infty} \underbrace{f\left(\frac{1}{h}, \frac{1}{h^2}\right)}_{\in X} = \lim_{h \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0$
 ist f aber in $b=0$ unstetig; bei der Annäherung an $b=0$
 längs dem Parabelast X ergibt sich nämlich $f(x) \not\rightarrow f(b)$.

5.) Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} & , \text{ falls } (x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0) \\ 0 & , \text{ falls } (x_1, x_2, x_3) = (0,0,0) \end{cases}$

Damit ist f zunächst in allen Punkten $b \neq 0$ (als Quotient von Polynomfunktionen) stetig. Für alle $x \neq 0$ gilt wegen $|x_1 x_2| \leq x_1^2 + x_2^2$ aber

$$|f(x_1, x_2, x_3)| = \left| \frac{x_1 x_2 x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \right| = \frac{|x_1 x_2|}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot |x_3| \leq \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot |x_3|$$

$\stackrel{x_3^2 \geq 0}{\leq} |x_3| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, also $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$; damit ist f auch in $b=0$ stetig.

11.17. Satz

Für eine stetige Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gilt:

- Ist $X \subseteq \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge, so ist auch $f^{-1}(X) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.
- Ist $X \subseteq \mathbb{R}^m$ eine abgeschlossene Teilmenge, so ist auch $f^{-1}(X) \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen.
- Ist $X \subseteq \mathbb{R}^m$ eine kompakte Teilmenge, so ist auch $f(X) \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakt.

Beweis:

- a) Sei $a \in f^{-1}(X)$, also $f(a) \in X$; damit gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon(f(a)) \subseteq X$. Wegen der Stetigkeit von f im Punkte a gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - a\| < \delta$ gilt $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$, also $f(x) \in K_\varepsilon(f(a)) \subseteq X$ und damit $x \in f^{-1}(X)$.

29.06.05

Folglich ist $K_S(a) \subseteq f^{-1}(x)$.

b) Es ist $V = \mathbb{R}^n \setminus X$ eine offene Teilmenge, und gemäß a) ist auch $f^{-1}(V) = f^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus X) = \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(X)$ offen, also $f^{-1}(X)$ abgeschlossen. (Ü35b)

c) Sei $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten $b_k \in f(X)$; für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $a_k \in X$ mit $f(a_k) = b_k$. Nach dem Satz von Bolzano - Weierstraß besitzt die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Punkten $a_k \in X$ einen Häufungspunkt $c \in X$, also eine Teilfolge $(a_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{k_j} = c$, wegen der Stetigkeit von f im Punkte c gilt dann $\lim_{j \rightarrow \infty} \underbrace{f(a_{k_j})}_{b_{k_j}} = f(c) \in f(X)$. Damit ist $f(X)$ kompakt.

11.18. Beispiele

1.) Für jede stetige Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist die Menge ihrer Nullstellen $N = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$ abgeschlossen, es ist nämlich $N = f^{-1}(\{0\})$ mit $\{0\} \subseteq \mathbb{R}^m$ abgeschlossen.

2.) Für jede stetige Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Niveaumenge $N_f(c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\}$ für alle $c \in \mathbb{R}$ abgeschlossen; es ist nämlich $N_f(c) = f^{-1}(\{c\})$ mit $\{c\} \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen.

3.) Für jede stetige Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist der Graph $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}, y = f(x)\}$ abgeschlossen; es ist nämlich $g: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) = f(x) - y$ eine stetige Funktion mit $G_f = g^{-1}(\{0\})$.

11.19 Satz von Weierstraß

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge sowie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es Punkte $p, q \in D$ mit $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ für alle $x \in D$. („ f besitzt in p ein absolutes Minimum sowie in q ein absolutes Maximum“)

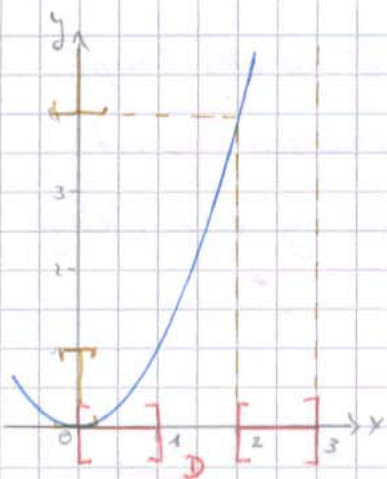
Beweis:

Nach Satz 11.17c) ist $W_f = f(D) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß also abgeschlossen und kompakt. Sei $s = \sup W_f$, dann gibt es eine Folge $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in W_f mit $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = s$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $a_k \in D$ mit $f(a_k) = y_k$, und nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt die Punktfolge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt $q \in D$. Mit $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{k_j} = q$ gilt $f(q) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(a_{k_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} y_{k_j} = s$, also $s \in W_f$. Dann ist $f(x) \leq s = f(q)$ für alle $x \in D$. Entsprechend schließt man für p .

11.20. Beispiele

1.) Es ist $D = [0, 1] \cup [2, 3] \subseteq \mathbb{R}$ kompakt sowie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, stetig, mit $p=0$ und $q=3$ gilt $f(p)=0 \leq f(x) \leq 9 = f(q)$ für alle $x \in D$, und es ist $W_f = [0, 1] \cup [4, 9]$.

Da D kein Intervall ist, kann $W_f \not\subseteq [f(p); f(q)]$ gelten!



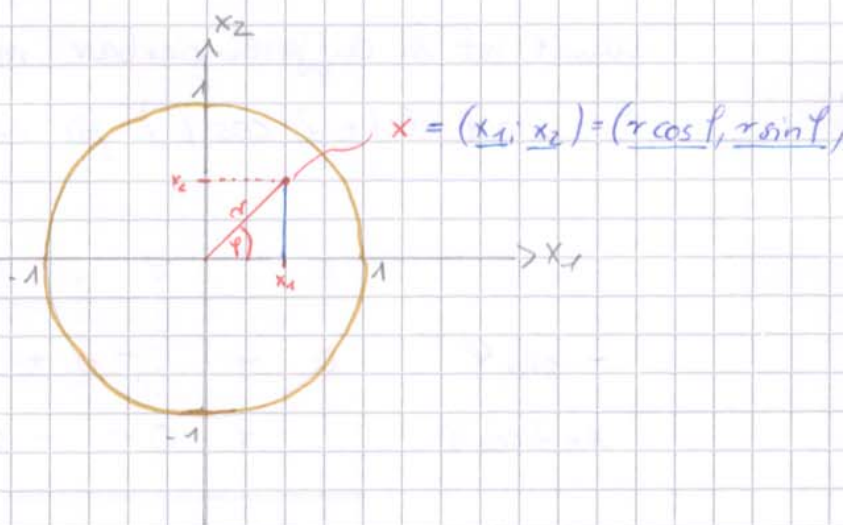
2.) Die abgeschlossene Einheitskreisscheibe $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1\}$ ist kompakt, damit besitzt jede stetige Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ein globales Minimum $p \in D$ und ein globales Maximum $q \in D$ mit $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ für alle $x \in D$.

a) $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Es ist $f(x) = x_1^2 + x_2^2 = \|x\|^2$ und damit $0 \leq f(x) \leq 1$ für alle $x \in D$.

- Wegen $f(x) = 0 \iff \|x\|^2 = 0 \iff \|x\| = 0 \iff x = 0$ ist $p(0;0)$ das einzige globale Minimum von f .

- Wegen $f(x) = 1 \iff \|x\|^2 = 1 \iff \|x\| = 1$ ist jeder Punkt q der Kreislänge $\partial D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ um $(0;0)$ mit Radius 1 globales Maximum von f .

b) $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 2x_1x_2$. Jeder Punkt $x \in D$ lässt sich mit Hilfe der Polarkoordinaten in der Form $x = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ mit $r \in [0, 1]$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$ (oder $\varphi \in \mathbb{R}$) darstellen.



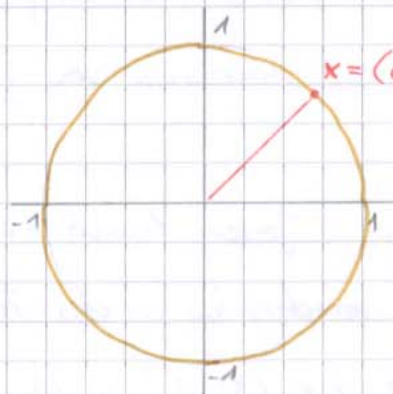
Damit ist $f(x) = f(x_1, x_2) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = 2r^2 \cos \varphi \sin \varphi = r^2 \sin 2\varphi$, also $-1 \leq f(x) \leq 1$

- Wegen $f(x) = 1 \iff r=1$ und $\sin 2\varphi = 1 \iff r=1$ und $2\varphi \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z} \iff r=1$ und $\varphi \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ oder $x = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ besitzt f die beiden globalen Maxima $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ und $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

- Wegen $f(x) = -1 \Leftrightarrow r=1$ und $\sin 2\varphi = -1 \Leftrightarrow r=1$ und $2\varphi \in \frac{3\pi}{2} + 2\pi \mathbb{Z} \Leftrightarrow r=1$ und $\varphi = \frac{3\pi}{4} + \pi \mathbb{Z} \Leftrightarrow \Leftrightarrow x = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ oder $x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ besitzt f die beiden globalen Maxima $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ und $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

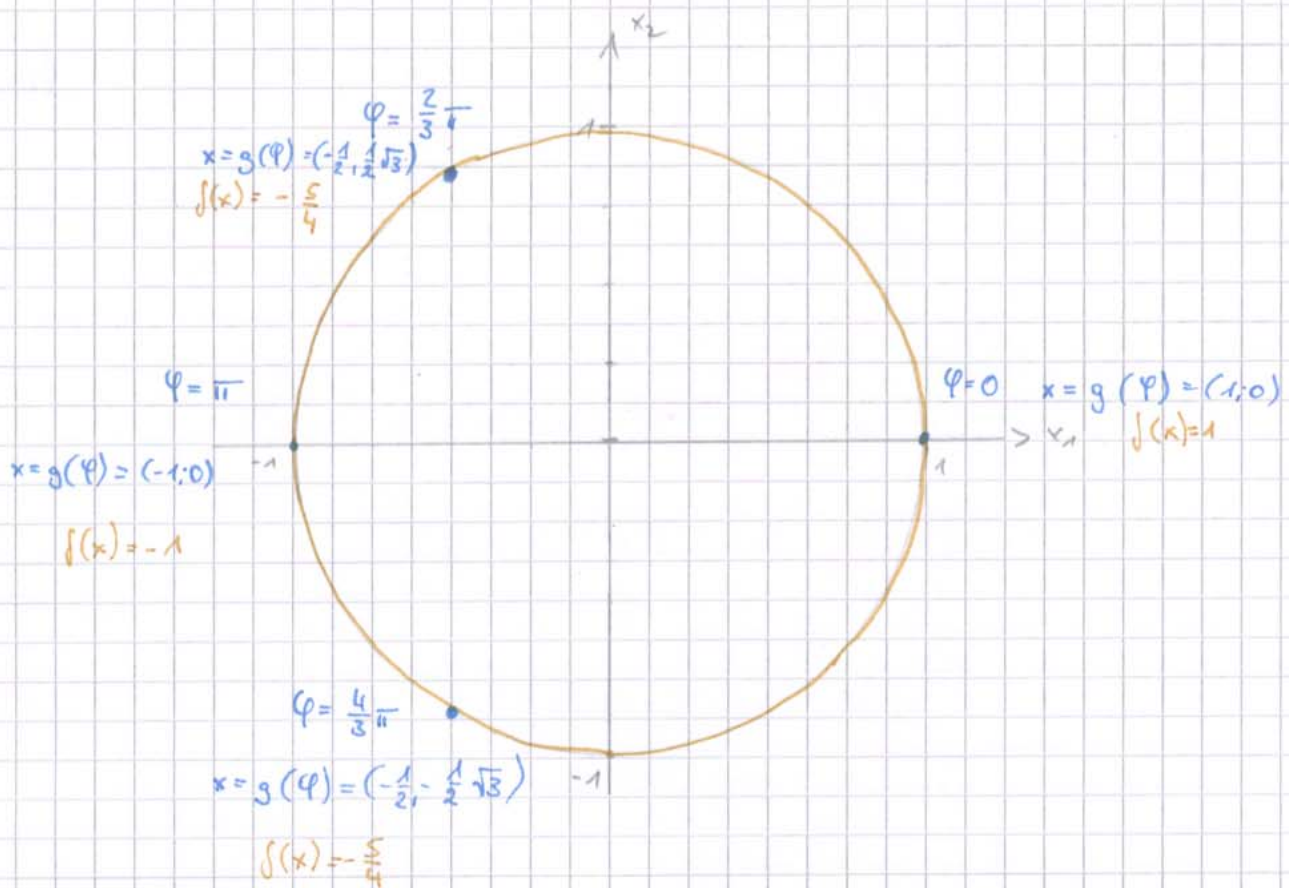
3.) Die Kreislinie $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ ist kompakt, daher besitzt jede stetige Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ nach dem Satz von Weierstraß globale Extrema, z.B. $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2$



Die Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ ist wegen $W_g \subset D$ eine Parametrisierung von D , zur Ermittlung der Extrema von f betrachten wir nun $h = f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(\varphi) = f(g(\varphi)) = f(\cos \varphi, \sin \varphi) = \cos \varphi - \sin^2 \varphi$.

Damit ist h differenzierbar mit $h'(\varphi) = -\sin \varphi - 2\sin \varphi \cos \varphi = -\sin \varphi \cdot (1 + 2 \cos \varphi)$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$





Damit besitzt f

- * in $\varphi = 0$, also $q = g(\varphi) = (1, 0)$ ein globales Maximum mit $f(x) = h(\varphi) = 1$
- * in $\varphi_1 = \frac{2\pi}{3}$ und $\varphi_2 = \frac{4\pi}{3}$, also $p_1 = g(\varphi_1) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ und $p_2 = g(\varphi_2) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$, globale Minima mit $f(p_1) = f(p_2) = -\frac{5}{4}$

Hier ist sogar $Wf = [-\frac{5}{4}; 1]$ (Zwischenwertsatz auf h !)