

für alle $\varepsilon \geq \varepsilon_0$, insbesondere liegt dann in $K_\varepsilon(b) =]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$ unendlich viele Folgenglieder. Damit ist b ein Häufungspunkt von $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$; damit besitzt $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine gegen b konvergente Teilfolge $(a_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$, und wegen X abgeschlossen ist $b \in X$.

22.06.05 Für $n=2$ sei $a_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$. Damit ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ und besitzt eine konvergente Teilfolge $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$; die Folge $(y_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ ist ebenfalls eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ und besitzt eine konvergente Teilfolge $(y_{k_{j_i}})_{i \in \mathbb{N}}$. Damit ist aber die Teilfolge $(a_{k_{j_i}})_{i \in \mathbb{N}}$ konvergent gegen ein $b \in \mathbb{R}^2$, und wegen X abgeschlossen ist $b \in X$.

„b) $\rightarrow$ a)“ Wir führen den Beweis durch Widerspruch.

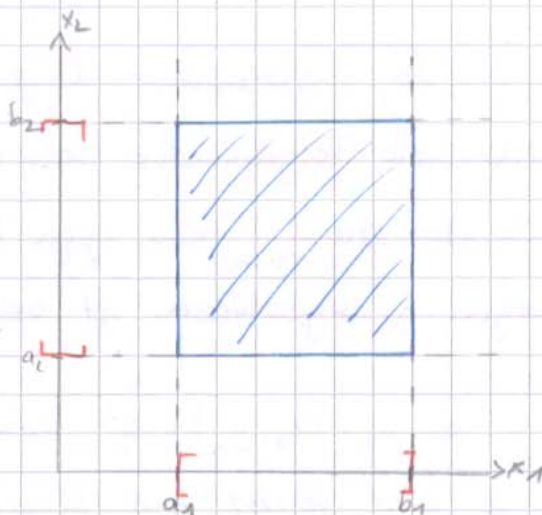
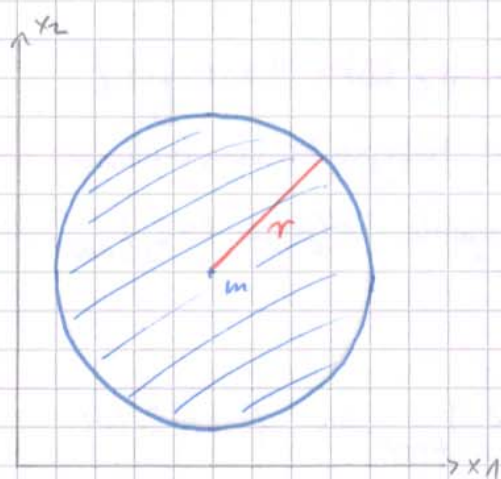
* Angenommen, X ist nicht abgeschlossen. Dann gibt es ein $b \in \bar{X} \setminus X$ und nach Satz 11.7 gibt es eine Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = b \notin X$, im Widerspruch zu b).

* Angenommen, X ist nicht beschränkt. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es $x \notin K_k(0)$, es gibt also ein $a_k \in X$ mit $\|a_k\| \geq k$, damit ist jede Teilfolge von $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt und folglich ~~konvergent~~ divergent.

11.10. Beispiele

1.) In $\mathbb{R}$ sind alle abgeschlossenen Intervalle $[a; b]$ kompakt; ferner sind auch endliche Vereinigungen dieser Intervalle kompakt, z.B. $[0; 1]$ u. $[2; 3]$

2.) Für jedes $m \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}^+$ ist die abgeschlossene Kugel $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - m\| \leq r\}$ um den Mittelpunkt m mit dem Radius r kompakt.



Ferner sind alle abgeschlossenen Quader $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ kompakt

3.) Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, so ist auch $\partial X \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, insbesondere ist die Kreiskurve $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - m\| = r\}$ mit Mittelpunkt m und Radius r sowie der Rand des Rechtecks kompakt.

4.) Jede beschränkte Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Punkten in $\mathbb{R}^n$ besitzt einen Häufungspunkt $b \in \mathbb{R}^n$, sie ist, ja in einem hinreichend großen abgeschlossenen Quader enthalten.

11.11. Definition

1.) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ sowie $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt Funktion in n Unbestimmten mit Werten in $\mathbb{R}^m$. Wegen

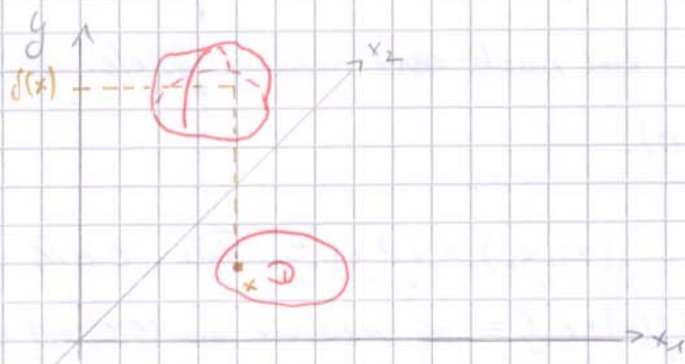
$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \text{ für alle } x \in D \text{ lassen sich } m \text{ reellwertige}$$

Koordinatenfunktionen $f_1, \dots, f_m: D \rightarrow \mathbb{R}$ von f definieren

2.) Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion mit $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$.

a) Die Punktmenge $G_f = \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$;

für $n=2$ ist G_f eine Fläche in $\mathbb{R}^3$.



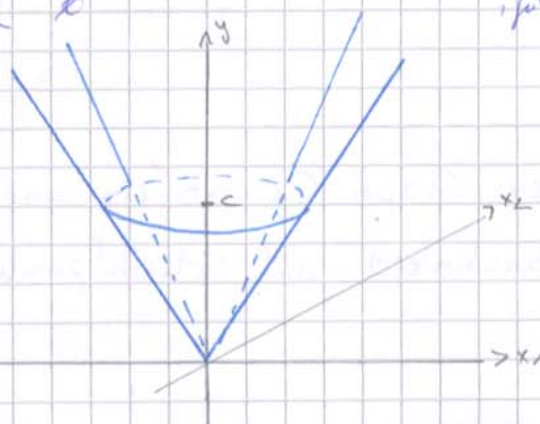
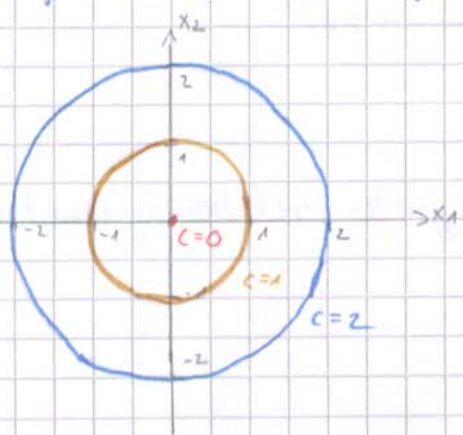
b) Für $c \in \mathbb{R}$ heißt die Punktmenge $N_f(c) = \{x \in D \mid f(x) = c\}$ Niveaumenge von f (zum Niveau c); für $n=2$ nennt man $N_f(c)$ auch Höhenlinie von f .

11. 12. Beispiele

1.) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ sowie $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Die affine (und für $b=0$ lineare) Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(x) = A \cdot x + b$, ist eine Funktion in den n Veränderlichen $x_1, \dots, x_n$ mit Werten in $\mathbb{R}^m$. Die m Koordinatenfunktionen sind $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i(x) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + b_i$, $i=1, \dots, m$. Für $j \in \{1, \dots, m\}$ ist $G_{f_j} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n + b_j = y\}$ eine affine Hyperebene in $\mathbb{R}^{n+1}$.

2.) Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Für $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$N_f(c) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = c\} = \begin{cases} \text{Kreislinie um } (0,0) \text{ mit Radius } c, & \text{für } c > 0 \\ \{(0,0)\} & \text{für } c = 0 \\ \emptyset & \text{für } c < 0 \end{cases}$$



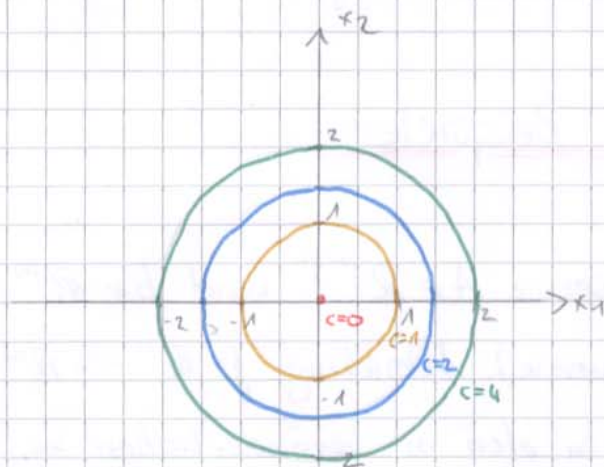
Ferner gilt $f(x_1, 0) = \sqrt{x_1^2 + 0^2} = \sqrt{x_1^2} = |x_1|$ für alle $x_1 \in \mathbb{R}$

sowie $f(0; x_2) = \sqrt{0^2 + x_2^2} = \sqrt{x_2^2} = |x_2|$ für alle $x_2 \in \mathbb{R}$.

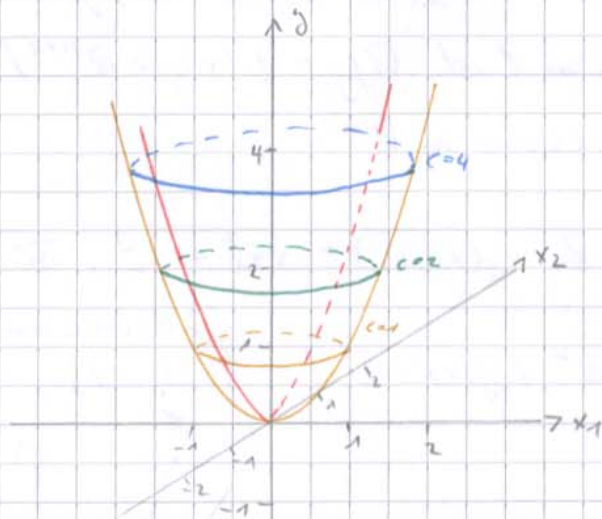
Der Graph G_f ist ein nach oben oben geöffneter Kreiskegel mit Spitze $(0, 0, 0)$.

3.) Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Für $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$N_f(c) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = c\} = \begin{cases} \text{Kreislösie um } (0,0) \text{ mit Radius } \sqrt{c}, & \text{für } c > 0 \\ \{(0,0)\} & \text{für } c = 0 \\ \emptyset & \text{für } c < 0 \end{cases}$$



Ferner gilt $f(x_1, 0) = \underline{x_1^2}$ für alle $x_1 \in \mathbb{R}$ sowie $f(0; x_2) = \underline{x_2^2}$ für alle $x_2 \in \mathbb{R}$

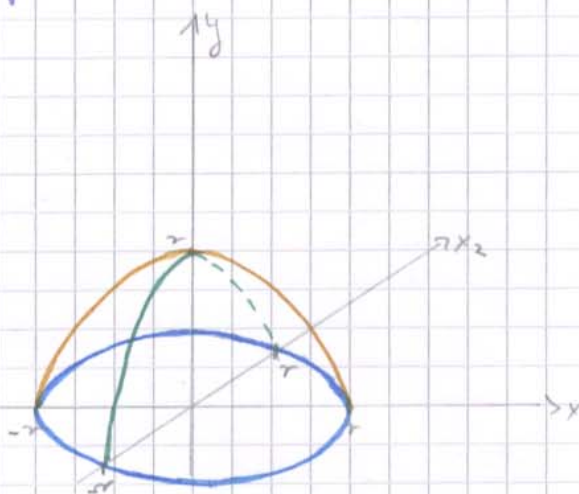


Der Graph G_f ist ein nach oben geöffnetes rotationssymmetrisches Paraboloid mit Scheitelpunkt $(0, 0, 0)$

- 4.) Für $r > 0$ sei $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq r\}$ die abgeschlossene Kreisscheibe um $(0,0)$ mit Radius r sowie $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2}$. Sei $c \in \mathbb{R}_0^+$; wegen $f(x) = c$
 $\Leftrightarrow r^2 - x_1^2 - x_2^2 = c^2 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = r^2 - c^2$ ist

$$N_f(c) = \begin{cases} \text{Kreislösung um } (0,0) \text{ mit Radius } \sqrt{r^2 - c^2}, & \text{für } 0 \leq c < r \\ \{(0,0)\} & \text{für } c = r \\ \emptyset & \text{für } c < 0 \text{ und } c > r \end{cases}$$

Ferner gilt $f(x_1, 0) = \sqrt{r^2 - x_1^2}$ für alle $x_1 \in [-r, r]$ sowie
 $f(0, x_2) = \sqrt{r^2 - x_2^2}$ für alle $x_2 \in [-r, r]$



Gf ist die obere Kugelsphäre um $(0,0,0)$ mit Radius r .

- 5.) Sei $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2}$. Für $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$ betrachten wir die punktierte Gerade $\mathbb{R} \cdot u \setminus \{(0,0)\}$, und für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt
 $f(t \cdot u) = f(tu_1, tu_2) = \frac{2 \cdot (tu_1) \cdot (tu_2)}{(tu_1)^2 + (tu_2)^2} = \frac{2t^2 u_1 u_2}{t^2 u_1^2 + t^2 u_2^2} = \frac{2u_1 u_2}{u_1^2 + u_2^2} = 2u_1 u_2$, damit ist f auf $\mathbb{R} \cdot u \setminus \{(0,0)\}$ konstant

