

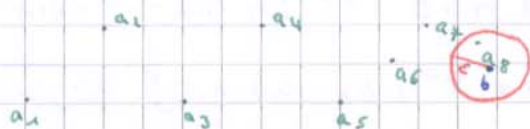
11.5. Definition und Satz

1.) Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten $a_k \in \mathbb{R}^n$

a) Die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen den Punkt $b \in \mathbb{R}^n$, wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} \|a_k - b\| = 0$ gilt; hierfür schreiben wir $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = b$.

In diesem Fall gilt also: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq k_0 \quad \|a_k - b\| < \varepsilon$

„Für jedes (noch so kleine) $\varepsilon > 0$ liegen in der Kreisscheibe $K_\varepsilon(b)$ fast alle Folgenglieder a_k , nämlich alle ab $k = k_0$.“



b) Die Folge heißt Cauchyfolge, wenn $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k, l \geq k_0 \quad \|a_k - a_l\| < \varepsilon$

2.) Die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ der Punkte $a_k = (a_{k,1}, \dots, a_{k,n}) \in \mathbb{R}^n$

a) konvergiert genau dann gegen den Punkt $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k,1} = b_1, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{k,n} = b_n$ gilt.

b) ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ die Zahlenfolge $(a_{k,j})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist.

Beweis: a) „ $\Rightarrow$ “ Es ist $|a_{k,1} - b_1| \leq \sqrt{(a_{k,1} - b_1)^2 + \dots + (a_{k,n} - b_n)^2} = \|a_k - b\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ und damit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k,1} = b_1$, usw.

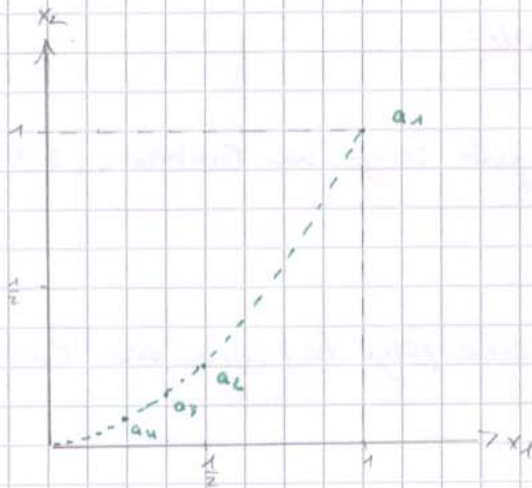
„ $\Leftarrow$ “ Es ist $\|a_k - b\| = \sqrt{\underbrace{(a_{k,1} - b_1)^2}_{\rightarrow 0} + \dots + \underbrace{(a_{k,n} - b_n)^2}_{\rightarrow 0}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

3.) Eine Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist (Vollständigkeit von $\mathbb{R}^n$), denn:

$$(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert in } \mathbb{R}^n \iff (a_{k,1})_{k \in \mathbb{N}}, \dots, (a_{k,n})_{k \in \mathbb{N}} \text{ konvergiert in } \mathbb{R} \\ \iff (a_{k,1})_{k \in \mathbb{N}}, \dots, (a_{k,n})_{k \in \mathbb{N}} \text{ Cauchyfolgen in } \mathbb{R} \iff (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \\ \text{Cauchyfolge in } \mathbb{R}^n$$

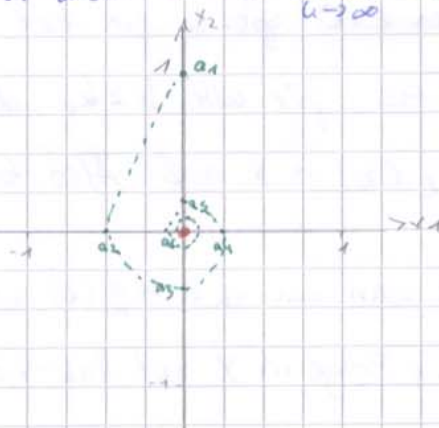
11. 16. Beispiele

1.) Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $a_k = \left(\frac{1}{k}; \frac{1}{k^2}\right) \in \mathbb{R}^2$, wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k,1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{k,2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2} = 0$ ist $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = (0,0)$



Die Punktfolge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ nähert sich auf einem Parabelast dem Ursprung.

2.) Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $a_k = \left(\frac{1}{k} \cos \frac{k\pi}{2}; \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi}{2}\right) \in \mathbb{R}^2$; wegen $|a_{k,1}| = \frac{1}{k} \cdot \underbrace{|\cos \frac{k\pi}{2}|}_{\leq 1} \leq \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ und $|a_{k,2}| = \frac{1}{k} \cdot |\sin \frac{k\pi}{2}| \leq \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ ist $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = (0,0)$



Die Punktfolge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ nähert sich auf einer Spirale dem Ursprung.

3.) Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $a_k = \left((-1)^k, \frac{1}{k} \right) \in \mathbb{R}^2$, da die Zahlenfolge $(a_{k,1})_{k \in \mathbb{N}} = \left((-1)^k \right)_{k \in \mathbb{N}} = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ divergiert, ist auch die Punktfolge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ divergent (= nicht konvergent).



Dagegen gilt $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{2j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(1, \frac{1}{2j} \right) = \underline{(1, 0)}$

sowie

$\lim_{j \rightarrow \infty} a_{2j-1} = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(-1, \frac{1}{2j-1} \right) = \underline{(-1, 0)}$

M.7 Satz

Für eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt:

- Ist $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge von Punkten $a_k \in X$, so gilt $b = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \in \overline{X}$
- Für jedes $b \in \overline{X}$ gibt es eine Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Punkten $a_k \in X$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = b$
- X ist genau dann abgeschlossen, wenn jede konvergente Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Punkten $a_k \in X$ einen Grenzwert $b = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \in X$ besitzt

Beweis:

a)



Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|a_k - b\| < \varepsilon$ für alle $k \geq k_0$, damit ist $a_{k_0} \in K_\varepsilon(b) \cap X \neq \emptyset$. Also $b \in \overline{X}$

- Für jedes $k \in \mathbb{N}$ wähle man ein $a_k \in K_{\frac{1}{k}}(b) \cap X \neq \emptyset$; damit ist $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $\|a_k - b\| < \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, also $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = b$

c) „ $\Rightarrow$ “ Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in X , nach a) gilt dann
 $b = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \in \bar{X}$, und wegen $X = \bar{X}$ gilt $b \in X$.

„ $\Leftarrow$ “ Für jedes $b \in \bar{X}$ gibt es nach b) eine Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X
mit $b = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$, nach Voraussetzung ist $b \in X$, also $X = \bar{X}$
und damit X abgeschlossen.

11.8 Definition und Bemerkung

1.) Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten $a_k \in \mathbb{R}^n$

a) Ist $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$,
so heißt $(a_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

So ist etwa $(a_{2j})_{j \in \mathbb{N}}$ und $(a_{2j-1})_{j \in \mathbb{N}}$ sowie
 $(a_{j^2})_{j \in \mathbb{N}}$ und $(a_{2j})_{j \in \mathbb{N}}$ Teilfolgen von $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

b) Ein Punkt $b \in \mathbb{R}^n$ heißt Häufungspunkt von $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$,
wenn es eine Teilfolge $(a_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ gibt mit $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{k_j} = b$.

2a) Ist $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergent gegen $b \in \mathbb{R}^n$, so ist b der einzige
Häufungspunkt von $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$; jede Teilfolge $(a_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ konvergiert
gegen b .

b) Die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $a_k = \left((-1)^k, \frac{1}{k}\right) \in \mathbb{R}^2$ aus Bsp. 11.6 (3)
besitzt die beiden Häufungspunkte $(-1, 0)$ und $(1, 0)$.

c) Die Zahlenfolge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $a_k = \begin{cases} k & \text{für } k \text{ ungerade} \\ \frac{1}{k} & \text{für } k \text{ gerade} \end{cases}$
ist wegen $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{2j-1} = \lim_{j \rightarrow \infty} (2j-1) = \infty$ unbeschränkt und
insbesondere damit divergent, wegen $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{2j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2j} = 0$.

ist 0 ein Häufungspunkt von $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

3.) Ein Punkt $b \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Häufungspunkt von $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ in der offenen Kreisscheibe $K_\varepsilon(b)$ unendlich viele Folgenglieder liegen; dabei dürfen (im Gegensatz zum Grenzwert) auch unendlich viele Folgenglieder außerhalb von $K_\varepsilon(b)$ liegen.

11.9. Satz von Bolzano-Weierstraß

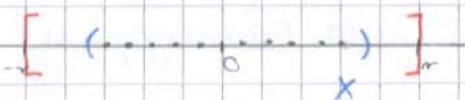
(Bernhard Bolzano, 1781 - 1848, Karl Weierstraß, 1815 - 1897)

Für eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

- a) X ist abgeschlossen und beschränkt (d.h. $X \subseteq K_r(0)$ für ein $r > 0$)
- b) Jede Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Punkten in X besitzt einen Häufungspunkt $b \in X$. In diesem Fall heißt X eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

Beweis:

„a) $\Rightarrow$ b)“ Sei zunächst $n=1$, damit ist $X \subseteq [-r, r]$. Durch



successive Intervallhalbierung definiert man eine Intervallschachtelung $([c_k, d_k])_{k \in \mathbb{N}_0}$

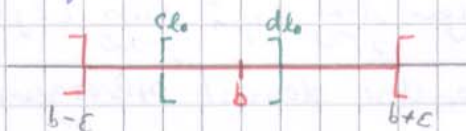
mit $c_0 = -r$ und $d_0 = r$, so daß in jedem Intervall $[c_k, d_k]$ unendlich viele Folgenglieder, so ist etwa

$$\begin{cases} c_1 = -r \text{ und } d_1 = 0 & \text{falls in } [-r, 0] \text{ unendl. viele} \\ c_1 = 0 \text{ und } d_1 = r & \text{Folgenglieder sind} \\ & \text{sonst} \\ & \text{(dann sind aber in } [0, r] \text{ unendlich} \\ & \text{viele Folgenglieder)} \end{cases}$$

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip ist $\bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} [c_k, d_k] \neq \emptyset$,

und für $b \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} [c_k, d_k]$ gilt dann:

für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $[c_{k_0}, d_{k_0}] \subseteq [b-\varepsilon, b+\varepsilon]$



für alle $\varepsilon \geq \varepsilon_0$, insbesondere liegt dann in $K_\varepsilon(b) =]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$
unendlich viele Folgeglieder. Damit ist b ein Häufpunkt von $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$,
damit besitzt $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine gegen b konvergente Teilfolge $(a_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$,
und wegen X abgeschlossen ist $b \in X$.