

$$\frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-2} = \frac{\alpha(x-2) + \beta(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{(\alpha+\beta)x + (-2\alpha+\beta)}{x^2-x-2} \text{ liefert}$$

der Koeffizientenvergleich $\alpha+\beta=0$ und $-2\alpha+\beta=1$, also $\alpha=-\frac{1}{3}$ und $\beta=\frac{1}{3}$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) dt = -\frac{1}{3} \int_0^x \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{3} \int_0^x \frac{dt}{t-2} = -\frac{1}{3} \left[\ln(t+1) \right]_0^x + \\ &+ \frac{1}{3} \left[\ln(t-2) \right]_0^x = -\frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \ln|x-2| = \\ &= -\frac{1}{3} \ln 2 \quad \text{für alle } x \in]-1; 2[. \end{aligned}$$

b) Man bestimme die Potenzreiheentwicklungen von f und F um den Punkt $a=0$ und gebe die Konvergenzradien an.

$$\text{Es ist } \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \quad \text{für alle } |x| < 1 \text{ sowie}$$

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad \text{für alle } \left|\frac{x}{2}\right| < 1, \text{ also } |x| < 2.$$

$$\begin{aligned} \text{Damit erhält man } f(x) &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \\ &+ \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{3} (-1)^n - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^n} \right] x^n \quad \text{für alle } |x| < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ferner gilt } F(x) &= \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{3} (-1)^n - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^n} \right] \cdot \int_0^x t^n dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{3} (-1)^n - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^n}}{n+1} x^{n+1} \quad \text{für alle } |x| < 1. \text{ Beide Potenzreihen} \\ &\text{besitzen den Konvergenzradius 1.} \end{aligned}$$

§ 11 Grundlegende Eigenschaften von reellen Funktionen mehrerer Veränderlicher

15.06.05

11.1 Definition und Bemerkung

1.) Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Abbildung $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ heißt Metrik, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt.

$$a) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$b) d(x,y) = d(y,x)$$

$$c) d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$



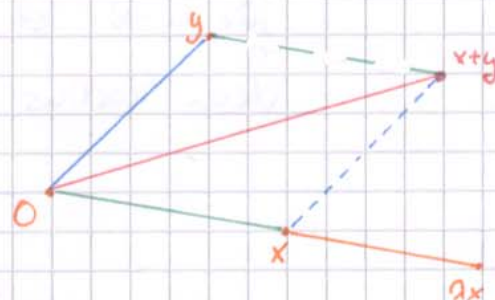
In diesem Fall heißt (X,d) ein metrischer Raum; unter $d(x,y)$ versteht man den Abstand der Punkte x und $y \in X$.

2.) Sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Eine Abbildung $v: V \rightarrow \mathbb{R}^+$ heißt Norm, wenn für alle $x,y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a) v(x) = 0 \iff x = 0$$

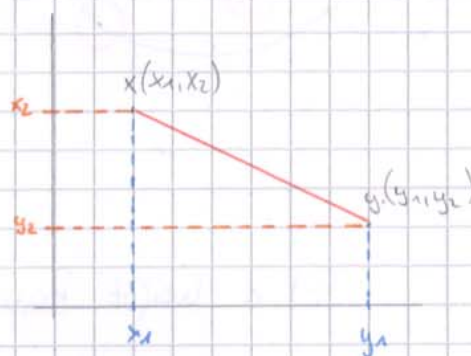
$$b) v(\lambda \cdot x) = |\lambda| \cdot v(x)$$

$$c) v(x+y) = v(x) + v(y)$$



In diesem Fall heißt (V,v) ein normierter Raum, unter $v(x)$ versteht man die Länge des Vektors $x \in V$. Durch $d_v(x,y) = v(x-y)$ wird eine Metrik d_v auf V definiert.

3.) Ist (V,δ) ein euklidischer Vektorraum, also δ ein Skalarprodukt auf V , so definiert $v(x) = \|x\| = \sqrt{\delta(x,x)}$ eine Norm auf V . Wir betrachten im folgenden stets die vom Standard-Skalarprodukt δ_ϵ auf $\mathbb{R}^n$ definierte euklidische Norm $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ für $x \in \mathbb{R}^n$, sowie den euklidischen Abstand $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$ für $x,y \in \mathbb{R}^n$.

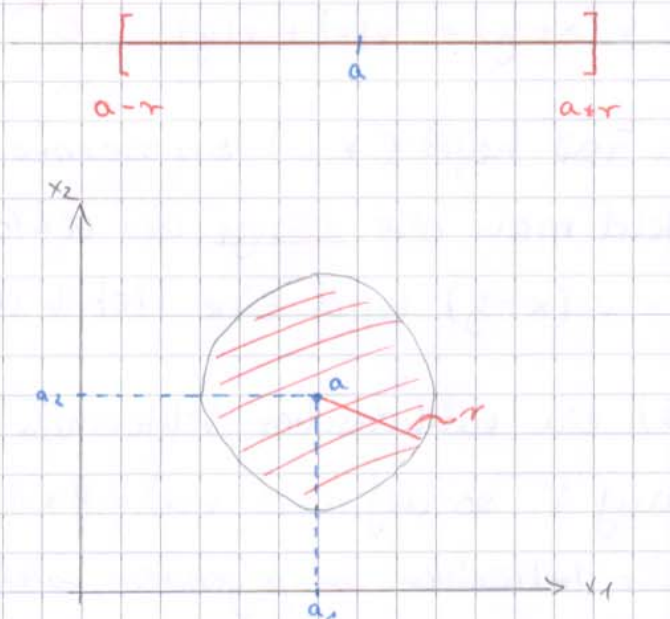


11.2. Definition und Bemerkung

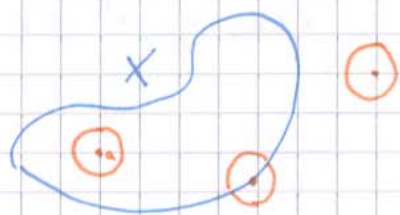
Sei $\| \cdot \|$ die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^n$.

- 1.) Für $a \in \mathbb{R}^n$ und $r \in \mathbb{R}^+$ ist $K_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| < r\}$ die (offene) Kugel um den Mittelpunkt a mit dem Radius r .

Speziell für $n=1$ ist $K_r(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < r\} =]a-r, a+r[$
für $n=2$ ist $K_r(a)$ die offene Kreisscheibe um $a \in \mathbb{R}^2$ mit dem Radius $r > 0$.



- 2.) Für eine Teil $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und einen Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ definiert man:



- a) a heißt innerer Punkt von X wenn es ein $r > 0$ mit $K_r(a) \subseteq X$
b) a heißt Berührungspunkt von X wenn für jedes $r > 0$ gilt $K_r(a) \cap X \neq \emptyset$

- c) a heißt Randpunkt von X , wenn a ein Berührungspunkt von X , aber kein innerer Punkt von X ist, für jedes

$r > 0$ gilt also $K_r(a) \cap X \neq \emptyset$ und $K_r(a) \not\subset X$.

3.) Für eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ erklärt man ferner:

a) Die Menge $\overset{\circ}{X}$ aller inneren Punkte von X heißt das Innere oder der offene Kern von X ; es gilt $\overset{\circ}{X} \subseteq X$.

b) Die Menge $\bar{X}$ aller Berührungspunkte von X heißt der Abschluss oder die abgeschlossene Hülle von X ; es gilt $X \subseteq \bar{X}$.

c) Die Menge ∂X aller Randpunkte von X heißt der Rand von X ; es gilt $\overset{\circ}{X} \cup \partial X = \bar{X}$ und $\partial X \cap \overset{\circ}{X} = \emptyset$.

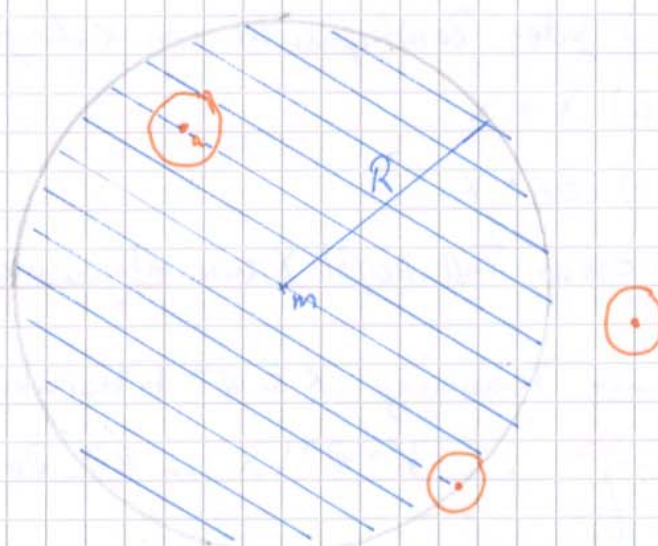
4.) Damit ergibt sich für die folgenden Beispiele:

a) $X =]c; d[\subseteq \mathbb{R}$ mit $c < d$



Es ist $\overset{\circ}{X} =]c; d[$ und $\bar{X} = [c; d]$ sowie $\partial X = \{c; d\}$.

b) $X = K_R(m) \subseteq \mathbb{R}^n$ für $m \in \mathbb{R}^n$ und $R > 0$.

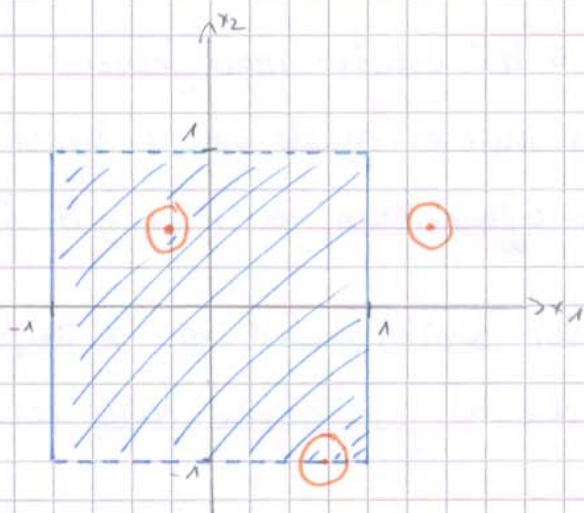


Es ist $\overset{\circ}{X} = X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - m\| < R\}$ und $\bar{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - m\| \leq R\}$ sowie $\partial X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - m\| = R\}$.

c) $X = [-1; 1] \times [-1; 1] \subseteq \mathbb{R}^2$. Es ist $\overset{\circ}{X} =]-1; 1[\times]-1; 1[$ und

$\bar{X} = [-1; 1] \times [-1; 1]$ sowie

$$\partial X = \{-1; 1\} \times [-1; 1] \cup [-1; 1] \times \{-1; 1\}$$



11.3. Definition und Bemerkung

Sei wieder $\| \cdot \|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$.

1.) Für eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

a) Jeder Punkt von X ist ein innerer Punkt von X

b) $\overset{\circ}{X} = X$

c) $\partial X \cap X = \emptyset$

In diesem Fall heißt X eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

2.) Für eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

a) Jeder Berührungspunkt von X liegt in X

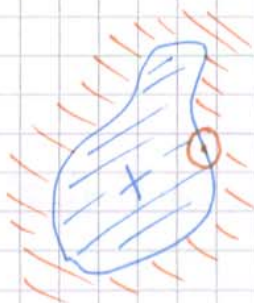
b) $\bar{X} = X$

c) $\partial X = X$

In diesem Fall heißt X eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$.

3.) Zu einer Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ betrachten wir das Komplement

$Y = \mathbb{R}^n \setminus X$ in $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:



$$a \in \partial X \iff \forall r > 0 \quad K_r(a) \cap X \neq \emptyset \text{ und } K_r(a) \not\subseteq X$$

$$\iff \forall r > 0 \quad K_r(a) \not\subseteq Y \text{ und } K_r(a) \cap Y \neq \emptyset$$

$$\iff a \in \partial Y$$

Damit stimmen ∂X und ∂Y überein, und wir erhalten:

* X offen $\Leftrightarrow \partial X \cap X = \emptyset \Leftrightarrow \partial Y \subseteq Y \Leftrightarrow Y$ abgeschlossen

* X abgeschlossen $\Leftrightarrow \partial X \subseteq X \Leftrightarrow \partial Y \cap Y = \emptyset \Leftrightarrow Y$ offen

11.4. Beispiele

1.) Die Intervalle $]a; b[$ sowie $]a, \infty[$ und $] - \infty; b[$ sind offen, die Intervalle $[a; b]$ sowie $[a, \infty[$ und $] - \infty, b]$ sind abgeschlossen, die Intervalle $[a; b[$ und $]a; b]$ sind weder offen noch abgeschlossen.

2.) Für $a \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ ist $K_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$ offen und $\bar{K}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$ abgeschlossen.

3.) Die Mengen $\emptyset$ und $\mathbb{R}^n$ sind offen wie abgeschlossen, sie stellen die einzigen „abgeschlossenen“ Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ dar. Ferner sind

a) beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte offener Mengen offen, aber $\bigcap_{n \in \mathbb{N}}]-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}[= \{0\}$ ist nicht offen

b) beliebige Durchschnittmenge und endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen abgeschlossen, aber $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{n}; 2 - \frac{1}{n}] =]0; 2[$ ist nicht abgeschlossen.

4.) Für jedes $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist X° offen sowie $\bar{X}$ und ∂X abgeschlossen.