

3.) Es ist $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$ für $10.06.05$

alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$ besitzt den Konvergenzradius $\rho=1$ und definiert die Funktion $f:]-1;1[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$, sie darf gliedweise integriert werden und es gilt

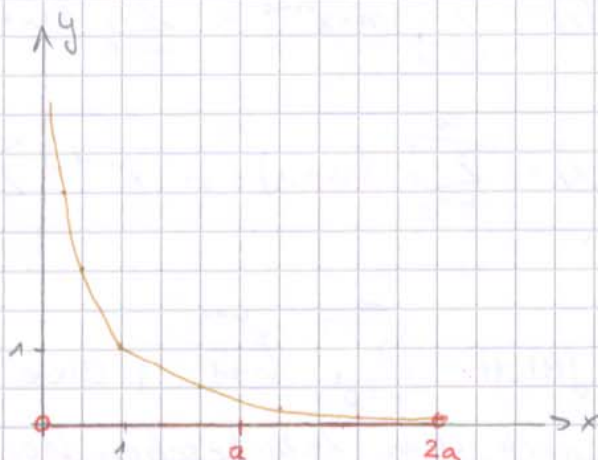
$$\arctan = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

für alle $|x| < 1$.

Die Potenzreihe besitzt ebenfalls den Konvergenzradius $\rho=1$, konvergiert aber nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium auch für $x=1$; damit ist nach dem Abelschen Grenzwertsatz $\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

4.) Es ist $\frac{1}{x} = \frac{1}{a+(x-a)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{x-a}{a})} = \frac{1}{a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-a}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} (x-a)^n$ für alle $|\frac{x-a}{a}| < 1$, also $|x-a| < |a|$.

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} (x-a)^n$ mit dem Entwicklungspunkt $a > 0$ besitzt also den Konvergenzradius a und definiert die Funktion $f:]0;2a[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$



10.18. Bemerkung

- 1.) Sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen sowie $a \in \mathbb{R}$; die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ besitze den Konvergenzradius $\rho > 0$. Nach dem Hauptsatz über Potenzreihen ist die Funktion $f:]a-\rho, a+\rho[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ beliebig oft differenzierbar, und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.
- 2.) Sei nun umgekehrt $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion sowie a ein Punkt im Inneren des Definitionsbereiches D . Die Potenzreihe $T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ heißt Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt a ; die n -te Partialsumme ist also das n -te Taylorpolynom $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ von f im Entwicklungspunkt a .
- 3.) Für den Konvergenzradius ρ der Taylorreihe $T_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ können die beiden folgenden Fälle auftreten:

Fall 1: $\rho = 0$: Die Taylorreihe $T_f(x)$ konvergiert ausschließlich im Entwicklungspunkt a .

Fall 2: $\rho > 0$: Die Taylorreihe $T_f(x)$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| < \rho$ gegen eine Grenzfunktion $\tilde{f}:]a-\rho, a+\rho[\rightarrow \mathbb{R}$, dabei ist $\tilde{f}(x) = f(x)$
 $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = f(x) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0$

- 4.) Besitzt die Taylorreihe $T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ einen Konvergenzradius $\rho > 0$ mit $T_f(x) = f(x)$ für alle $x \in]a-\rho, a+\rho[$, so sagt man f lässt sich im Punkt a in eine Potenzreihe (in die Taylorreihe) entwickeln, z.B.

$$a) \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!} (x-a)^n \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$b) \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

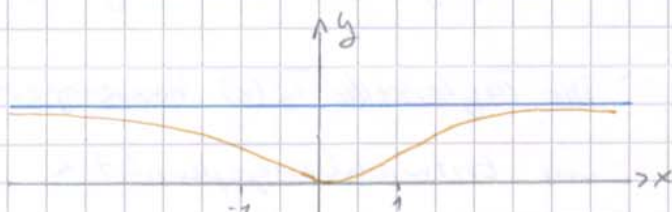
$$c) \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \text{für alle } x \in]-1; 1]$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{für alle } x \in [-1; 1]$$

Ist nämlich $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ eine Potenzreihe mit $\rho > 0$, so stimmt die Taylorreihe $T_f(x)$ für alle $x \in]a-\rho, a+\rho[$ mit der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ überein.

$$5.) \text{ Die Funktion } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

ist beliebig oft differenzierbar mit $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$,



$$\text{damit ist } T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } T_f(x) \neq f(x) \\ \text{für alle } x \neq 0$$

10.19. Beispiele

1.) (H 93 I 1) a) Man bestimme die Taylorreihe von $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \text{ um den Entwicklungspunkt } a=0. f \text{ ist}$$

(als gebrochenrationale Funktion) beliebig oft differenzierbar mit

$$f^{(u)}(x) = \frac{(u+1)!}{(1-x)^{2+u}} \quad \text{für alle } u \in \mathbb{N}_0 \text{ und } x \neq 1.$$

"u=0" $f^{(0)}(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = f(x) \quad \text{für alle } x \neq 1 \vee$

"u → u+1" $f^{(u+1)}(x) = \left(f^{(u)}\right)'(x) \stackrel{II}{=} (u+1)! (-2-u)(1-x)^{-2-u-1} (-1) =$
 $= \frac{(u+2)!}{(1-x)^{3+u}} \quad \checkmark$

Damit erhält man $T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n!} x^n =$
 $= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \quad \text{für alle } x \neq 1$

b) Man zeige, daß diese Potenzreihe auf dem Intervall $] -1, 1[$ gegen die Funktion f konvergiert. (Hinweis: Integration d. Reihe)

Wegen $\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = c$

besitzt die Taylorreihe den Konvergenzradius $\rho = \frac{1}{c} = 1$.

für alle $x \in] -1, 1[$ gilt $\int_0^x T_f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (n+1)t^n dt =$
 $= \sum_{n=0}^{\infty} \left[t^{n+1} \right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \quad \text{und damit}$

$$T_f(x) = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{(1-x) \cdot 1 - x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} = f(x)$$

c) Man bestimme den Wert von $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Es ist $f'(x) = T_f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot n \cdot x^{n-1} \quad \text{für alle } x \in] -1, 1[$,

speziell für $x = \frac{1}{2}$ ergibt sich $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = f'\left(\frac{1}{2}\right) =$

$$= \frac{2!}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^3} = 16$$

2.) (792 I 3) Gegeben sei $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}$

a) Man berechne die Stammfunktion $F:] -1, 2[\rightarrow \mathbb{R}$ von f mit $F(0) = 0$

Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ gilt $(x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$, und

wir bestimmen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-2} = \frac{1}{x^2 - x - 2}$, wegen

$$\frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-2} = \frac{\alpha(x-2) + \beta(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{(\alpha+\beta)x + (-2\alpha+\beta)}{x^2-x-2} \text{ liefert}$$

der Koeffizientenvergleich $\alpha+\beta=0$ und $-2\alpha+\beta=1$, also $\alpha=-\frac{1}{3}$ und $\beta=\frac{1}{3}$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) dt = -\frac{1}{3} \int_0^x \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{3} \int_0^x \frac{dt}{t-2} = -\frac{1}{3} \left[\ln(t+1) \right]_0^x + \\ &+ \frac{1}{3} \left[\ln(t-2) \right]_0^x = -\frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \ln|x-2| = \\ &= -\frac{1}{3} \ln 2 \quad \text{für alle } x \in]-1; 2[. \end{aligned}$$

b) Man bestimme die Potenzreiheentwicklungen von f und F um den Punkt $a=0$ und gebe die Konvergenzradien an.

$$\text{Es ist } \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \quad \text{für alle } |x| < 1 \text{ sowie}$$

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad \text{für alle } \left|\frac{x}{2}\right| < 1, \text{ also } |x| < 2.$$

$$\begin{aligned} \text{Damit erhält man } f(x) &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \\ &+ \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{3} (-1)^n - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^n} \right] x^n \quad \text{für alle } |x| < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ferner gilt } F(x) &= \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{3} (-1)^n - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^n} \right] \cdot \int_0^x t^n dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{3} (-1)^n - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^n}}{n+1} x^{n+1} \quad \text{für alle } |x| < 1. \text{ Beide Potenzreihen} \\ &\text{besitzen den Konvergenzradius 1.} \end{aligned}$$

§ 11 Grundlegende Eigenschaften von reellen Funktionen mehrerer Veränderlicher

15.06.05

11.1 Definition und Bemerkung

1.) Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Abbildung $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ heißt Metrik, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt.

$$a) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$