

und wegen $\sum_{n=1}^{\infty} M \cdot \left(\frac{r}{|b-a|}\right)^n = \frac{M}{1 - \frac{r}{|b-a|}} < \infty$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{[a-r, a+r]}$

konvergent, woraus mit dem Konvergenzkriterium von Weierstraß die absolute und gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, also von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ auf $[a-r, a+r]$ folgt.

Analog schließt man für die andere Potenzreihe.

10.14. Folgerung

Sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen sowie $a \in \mathbb{R}$. Um das Konvergenzverhalten der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ zu untersuchen, betrachten wir die Menge

$R = \{ |x-a| \mid \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \text{ konvergiert} \}$. Wir nennen

$$\rho = \begin{cases} \sup R & \text{falls } R \text{ beschränkt ist} \\ \infty & \text{falls } R \text{ unbeschränkt ist} \end{cases}$$

den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$

08.06.05

Fall 1: $\rho = 0$ Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ ausschließlich im Entwicklungspunkt a .

Fall 2: $\rho \in \mathbb{R}^+$ Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ absolut konvergent für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| < \rho$ sowie divergent für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| > \rho$.

Fall 3: $\rho = \infty$ Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ absolut für alle $x \in \mathbb{R}$.

Ist $c_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ und existiert der Grenzwert $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \neq 0$, so gilt $\rho = \frac{1}{c}$; für alle $x \neq a$ ist $a_n = c_n \cdot (x-a)^n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ mit

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{c_{n+1} (x-a)^{n+1}}{c_n (x-a)^n} \right| = \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \cdot |x-a| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c \cdot |x-a|$$

und nach dem Quotientenkriterium ist

* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ absolut konvergent für $c \cdot |x-a| < 1$, also $|x-a| < \frac{1}{c}$

* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ divergiert für $c \cdot |x-a| > 1$, also $|x-a| > \frac{1}{c}$

Für $c=0$ ist $\rho=\infty$, und für $c=\infty$ ist $\rho=0$.

10.15. Beispiele

1.) Für $r \geq 0$ betrachten wir die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^r \cdot x^n$;

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{(n+1)^r}{n^r} \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^r \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = c$,

und der Konvergenzradius ρ ist $\rho = \frac{1}{c} = 1$. Entsprechend erhält man für den Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^r}$ ebenfalls $\rho=1$.

2.) (H 90 II 3) Man zeige, daß die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n n!}{n^n}$ den Konvergenzradius e besitzt. Es ist $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ mit

$$c_n = \frac{n!}{n^n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}; \text{ damit ist } \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} \right| = \frac{(n+1) n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} = c,$$

damit ist $\rho = \frac{1}{c} = e$

3.) (FOZ III 6) Man berechne den Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} \right| = \left| \frac{(2n+2)! \cdot n! \cdot n!}{(n+1)! (n+1)! (2n)!} \right|$$

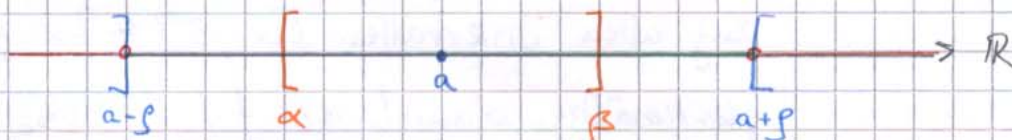
$$= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \cdot 2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2+0}{1+0} \cdot 2 = 4 = c;$$

für den Konvergenzradius ρ ergibt sich also $\rho = \frac{1}{c} = \frac{1}{4}$.

10.16 Hauptsatz über Potenzreihen

Sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen sowie $a \in \mathbb{R}$, die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ besitze den Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann gilt:

- 1.) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| < \rho$ absolut sowie auf jedem Intervall $[\alpha, \beta] \subseteq]a-\rho, a+\rho[$ gleichmäßig; sie divergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| > \rho$



- 2.) Für die Funktion $f:]a-\rho; a+\rho[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$, gilt:

- a) f ist stetig, und für alle $[\alpha, \beta] \subseteq]a-\rho; a+\rho[$ gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \int_{\alpha}^{\beta} (x-a)^n dx, \text{ insbesondere ist } \int \text{ mit } F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \text{ eine Stammfunktion von } f$$

- b) f ist differenzierbar, und für alle $x \in]a-\rho; a+\rho[$ gilt $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$

- c) f ist beliebig oft differenzierbar, und für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $f^{(k)}(a) = k! \cdot c_k$ bzw. $c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$.

Man sagt, Potenzreihen können auf ihrem offenen Konvergenzintervall $]a-\rho, a+\rho[$ gliedweise integriert (vgl. a) und differenzierbar (vgl. b) werden.

Beweis:

1.) folgt direkt aus Folgerung 10.14 und Satz 10.13

2.) a) Nach Satz 10.13 konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ auf allen Intervallen $[\alpha, \beta] \subseteq]a-\rho, a+\rho[$ gleichmäßig; damit ist $f|_{[\alpha, \beta]}$ stetig und $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \int_{\alpha}^{\beta} (x-a)^n dx$.
Folglich ist f stetig, und es ist F mit $F(x) = \int_a^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^x (t-a)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \left[\frac{(t-a)^{n+1}}{n+1} \right]_a^x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$, eine Stammfunktion von f .

b) Nach Satz 10.13 konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n(x-a)^{n-1}$ auf allen Intervallen $[\alpha, \beta] \subseteq]a-\rho, a+\rho[$ gleichmäßig, damit ist $f|_{[\alpha, \beta]}$ differenzierbar mit $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n(x-a)^{n-1}$ für alle $x \in [\alpha, \beta]$.
Folglich ist f auf ganz $]a-\rho, a+\rho[$ differenzierbar.

c) Die gliedweise differenzierte Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n(x-a)^{n-1}$ besitzt wieder den Konvergenzradius ρ , und nach b), angewandt auf f' , ist f' differenzierbar mit

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n(x-a)^{n-2} \text{ für alle}$$

$x \in]a-\rho, a+\rho[$. Mit Induktion erhält man,

daß f beliebig oft differenzierbar ist mit $f^{(k)}(x) =$

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) \cdot c_n \cdot (x-a)^{n-k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$; insbesondere ist dann

$$f^{(k)}(a) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) \cdot c_n \cdot (a-a)^0 = k! \cdot c_k$$

10.17 Beispiele

1.) Die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ besitzt den Konvergenzradius ∞ , sie definiert die Exponentialfunktion $f = \exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$

* Durch gliedweise Differentiation erhalten wir

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

* Durch gliedweise Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{\alpha}^{\beta} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} = e^{\beta} - e^{\alpha} = [e^x]_{\alpha}^{\beta} \end{aligned}$$

2.) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ besitzt den Konvergenzradius 1, sie konvergiert (als geometrische Reihe) genau für alle $|x| < 1$ und definiert die Funktion $f:]-1; 1[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.
Damit ist

$$* \frac{1}{(1-x)^2} = f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

$$* \frac{2}{(1-x)^3} = f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \cdot n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) x^n$$

sowie

* $-\ln(1-x) = \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$; diese Potenzreihe konvergiert nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium sogar auf $[-1; 1[$ und stellt dort nach dem Abelschen Grenzwertsatz eine stetige Funktion dar.

(Niels Hendrik Abel (1802-1829)), es ist also

$$-\ln 2 = -\ln(1-(-1)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \text{ bzw. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2.$$