

10.10 Beispiele

1.) Wir betrachten die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{n^2}$ auf $\mathbb{R}$,
als $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ mit $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\cos(n^2 x)}{n^2}$

* Sei $n \in \mathbb{N}$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $|f_n(x)| = \left| \frac{\cos(n^2 x)}{n^2} \right| =$
 $= \frac{1}{n^2} \cdot |\cos(n^2 x)| \leq \frac{1}{n^2}$ mit $f_n(0) = \frac{1}{n^2}$; damit
gilt $\|f_n\|_{\infty} \leq \frac{1}{n^2}$

* Wegen $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$ konvergiert die
Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ nach dem Weierstraß-Majorantenkriterium von
Weierstraß absolut und gleichmäßig

* Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist f_n stetig; damit besitzt die gleichmäßig
konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ eine stetige Grenzfunktion
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{n^2}$, und es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{\pi} \cos(n^2 x) dx = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[\frac{1}{n^2} \sin(n^2 x) \right]_0^{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin(n^2 \pi) = 0 \end{aligned}$$

* Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist f_n differenzierbar mit $f_n'(x) = -\sin(n^2 x)$
für alle $x \in \mathbb{R}$, insbesondere also $f_n'(\frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{n^2 \pi}{2})$ und
damit $|f_n'(\frac{\pi}{2})| = \left| \sin \frac{n^2 \pi}{2} \right| = \begin{cases} 0, & \text{für } n \text{ gerade} \\ 1, & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$

Folglich konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ der Ableitung
nicht punktweise.

2.) (790 I2) Gegeben sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$.

a) Man zeige die Konvergenz der Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$

Sei $x \in \mathbb{R}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\left| \frac{1}{n^2+x^2} \right| = \frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2}$;

wegen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ ist nach dem Majorantenkriterium auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ (absolut) konvergent. Damit wird durch die Summe der Reihe eine Funktion

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$, definiert.

b) Man untersuche f auf Differenzierbarkeit.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$, differenzierbar mit $f_n'(x) = -\frac{1}{(n^2+x^2)} \cdot 2x = -\frac{2x}{(n^2+x^2)^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Wegen $|f_n'(x)| = \left| -\frac{2x}{(n^2+x^2)^2} \right| = \frac{1}{n^2+x^2} \cdot \frac{2|x|}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2}$
 $\leq \frac{1}{n^2}$ $\leq \frac{2|x|}{1+x^2} \leq 1$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\|f_n'\|_{\mathbb{R}} \leq \frac{1}{n^2}$. Damit ist (wieder nach dem Majorantenkriterium) $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n'\|_{\mathbb{R}}$ konvergent, und das Konvergenzkriterium von Weierstraß liefert die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$. Folglich ist

$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ differenzierbar mit $f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2x}{(n^2+x^2)^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

3.) (796 I2) Man zeige, daß durch $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1+x^n}$ für $x \in]0,1[$ eine stetige Funktion $f:]0,1[\rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist.

a) Für alle $x \in]0,1[$ ist $\left| (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1+x^n} \right| = \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$

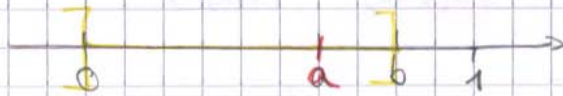
für alle $n \in \mathbb{N}$, damit ist die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$

eine (wegen $|x| < 1$) konvergente Majorante von

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1+x^n}$, und nach dem Majorantenkriterium

ist also die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1+x^n}$ (absolut) konvergent.

b) Wir weisen die Stetigkeit von f an jeder Stelle $a \in]0; 1[$ nach; wir wählen dazu ein $b \in]a; 1[$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei



$$f_n:]0; b] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1+x^n}$$

für alle $x \in]0; b]$ gilt $|f_n(x)| \leq$

$\leq x^n \leq b^n$ und damit $\|f_n\|_{\mathbb{R}[0; b]} \leq b^n$ damit ist

$\sum_{n=1}^{\infty} b^n = \frac{b}{1-b} < \infty$ eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\mathbb{R}[0; b]}$.

Wegen $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\mathbb{R}[0; b]} < \infty$ ist nach dem Konvergenzkriterium

von Weierstraß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{1+x^n}$ auf $]0; b]$

gleichmäßig konvergent, und die Stetigkeit der Reihenglieder

f_n (für alle $n \in \mathbb{N}$) überträgt sich auf die Grenzfunktion

$f|_{]0; b]}$; insbesondere ist f in a stetig.

10.11 Definition

Sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen sowie $a \in \mathbb{R}$. Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ die Potenzreihe um den Punkt a (mit dem Entwicklungspunkt a) mit den Koeffizienten $c_0, c_1, \dots$.

10.12. Beispiele

1.) Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$ ist eine Potenzreihe um $a=0$ mit dem Koeffizienten $c_n = \frac{1}{n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; sie konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen e^x .

$$\text{Ferner ist } e^x = e^2 \cdot e^{x-2} = e^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!} (x-2)^n,$$

dies ist also eine (ebenfalls für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen e^x konvergente)

Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $a=2$ mit den Koeffizienten

$$c_n = \frac{e^2}{n!} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

2.) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (x-a)^n$ ist eine Potenzreihe mit dem Entwicklungspunkt a und den Koeffizienten $c_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; sie konvergiert dann genau für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-a| < 1$, und zwar gegen $\frac{1}{1-(x-a)} = \frac{1}{(1+a)-x}$.

3.) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (n!) \cdot x^n$ um $a=0$ mit $c_n = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ divergiert wegen $\left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| = (n+1) \cdot |x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ für alle $x \neq 0$; sie konvergiert also ausschließlich in ihrem Entwicklungspunkt $a=0$.

10.13 Satz

Sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen sowie $a \in \mathbb{R}$. Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ konvergiere für ein $x=b$ mit $a \neq b$; ferner sei $0 < r < |b-a|$.



Dann konvergieren die Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n (x-a)^{n-1}$ absolut und gleichmäßig auf $[a-r, a+r]$.

Beweis: Da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (b-a)^n$ konvergiert, ist die Folge $(c_n (b-a)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, es gibt also ein $M > 0$ mit $|c_n| \cdot |b-a|^n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n_0 \in \mathbb{N}$ seien $f_n: [a-r, a+r] \rightarrow \mathbb{R}$,

$f_n(x) = c_n \cdot (x-a)^n$, für alle $x \in [a-r, a+r]$ gilt

$$\begin{aligned} |x-a| &\leq r < |b-a| \text{ und damit } |f_n(x)| = |c_n (b-a)^n| = \\ &= |c_n| \cdot |x-a|^n = \underbrace{|c_n| \cdot |b-a|^n}_{\leq M} \cdot \frac{|x-a|^n}{|b-a|^n} \leq M \cdot \frac{r^n}{|b-a|^n} \\ &= M \cdot \left(\frac{r}{|b-a|} \right)^n. \text{ Folglich ist } \|f_n\|_{[a-r, a+r]} \leq M \cdot \left(\frac{r}{|b-a|} \right)^n \end{aligned}$$

und wegen $\sum_{n=1}^{\infty} M \cdot \left(\frac{r}{|b-a|}\right)^n = \frac{M}{1 - \frac{r}{|b-a|}} < \infty$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{[a-r, a+r]}$

konvergent, woraus mit dem Konvergenzkriterium von Weierstraß die absolute und gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, also von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ auf $[a-r, a+r]$ folgt.

Analog schließt man für die andere Potenzreihe.

10.14. Folgerung

Sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen sowie $a \in \mathbb{R}$. Um das Konvergenzverhalten der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ zu untersuchen, betrachten wir die Menge

$R = \{ |x-a| \mid \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \text{ konvergiert} \}$. Wir nennen

$$\rho = \begin{cases} \sup R & , \text{ falls } R \text{ beschränkt ist} \\ \infty & , \text{ falls } R \text{ unbeschränkt ist} \end{cases}$$

den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$