

3.) Die Folge  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der stetigen Funktionen  $g_n: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n} & , \text{ für } 0 \leq x \leq \pi \cdot n \\ 0 & , \text{ für } \pi \cdot n < x \end{cases} \quad , \text{ konvergiert}$$

nach Beispiel 10.3 (4) gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$\int_0^\infty g_n(x) dx = \int_0^{\pi n} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n} dx = \left[ -\cos \frac{x}{n} \right]_0^{\pi n} = 2,$$

damit ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty g_n(x) dx = 2 \neq 0 = \int_0^\infty g(x) dx$

4.) (793 II 2) Man untersuche die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

mit  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{n - x^{2n}}{n + x^{2n}}$  auf punktweise und auf gleichmäßige Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihre Grenzfunktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Wir untersuchen  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  in Abhängigkeit von  $x \in \mathbb{R}$

Fall 1:  $|x| \leq 1$ : Damit ist  $|x^{2n}| \leq 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n}}{n} = 0, \text{ folglich gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - x^{2n}}{n + x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{x^{2n}}{n}}{1 + \frac{x^{2n}}{n}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

Fall 2:  $|x| > 1$ : Für  $a > 1$  gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{a^t} = 0$  (L'Hôpital), also  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{a^t} = 0$

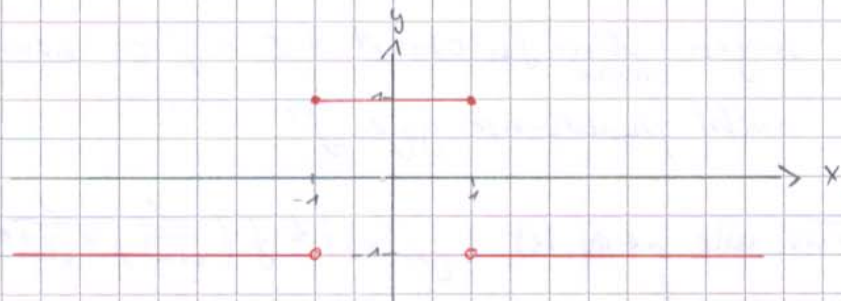
und damit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^{2n}} = 0$ , folglich ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - x^{2n}}{n + x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{x^{2n}} - 1}{\frac{n}{x^{2n}} + 1} = -1$$

Damit konvergiert die Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise gegen die Grenzfunktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } |x| \leq 1 \\ -1, & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$





Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $f_n$  als gebrochen-rationale Funktion stetig, wäre also die Konvergenz gleichmäßig, müßte  $f$  selbst stetig zu sein, im Widerspruch zu  $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (-1) = -1 \neq f(1)$ . Daher ist  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht gleichmäßig konvergent.

### 10.6. Bemerkung

1.) Die Folge  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der (beliebig oft) differenzierbaren Funktionen  $g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ , ist gleichmäßig konvergent, die Grenzfunktion  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = |x|$ , ist aber nicht differenzierbar.

2.) (798 I 3) Gegeben sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $f_n(x) = x e^{-n x^2}$

a) Man zeige, daß  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise gegen eine differenzierbare Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert.  
 Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Für  $x=0$  ist  $f_n(0)=0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und damit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$ , für  $x \neq 0$  ist  $e^{-x^2} < 1$  und damit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x \cdot (e^{-x^2})^n = 0$   
 Folglich konvergiert  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise gegen die (differenzierbare) Nullfunktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 0$

b) Konvergiert  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise gegen  $f'$ ?  
 Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $f'_n(x) = 1 \cdot e^{-n x^2} + x \cdot e^{-n x^2} (-2n x) = (1 - 2n x^2) e^{-n x^2}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , insbesondere also



$f_n'(0) = 1$ . Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 1 \neq 0 = f'(0)$  konvergiert  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht punktweise gegen  $f'$ .

Bemerkung: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $|f_n(x)| \leq f\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-n \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2n}e}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und damit  $\|f_n\|_{\mathbb{R}} = \frac{1}{\sqrt{2n}e} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , damit konvergiert  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sogar gleichmäßig gegen  $f$ .

### 10.7. Satz

Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen  $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem gemeinsamen Definitionsintervall  $D$ , dabei gelte

- 1.) Die Folge  $(f_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert für ein  $a \in D$
- 2.) Die Folge der Ableitungen  $(f_n')_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion  $g: D \rightarrow \mathbb{R}$

Dann konvergiert  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise gegen eine differenzierbare Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , und es ist  $f' = g$ .

Beweis:  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen, nach Satz 10.4 ist auch  $g$  stetig, und für alle  $x \in D$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n'(t) dt = \int_a^x g(t) dt; \quad \text{ferner sei } c = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$$

Wegen  $\int_a^x f_n'(t) dt = f_n(x) - f_n(a)$  erhält man also

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - f_n(a) + f_n(a)) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n'(t) dt + \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = \int_a^x g(t) dt + c \end{aligned}$$



Damit konvergiert  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise gegen die Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \int_a^x g(t) dt + c$ , nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist  $f$  differenzierbar mit  $f'(x) = g(x)$  für alle  $x \in D$ .

### 10.8. Definition und Bemerkung.

1.) Für die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der Funktionen  $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert man die  $n$ -te Partialsumme  $s_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ , für  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der Partialsummen wird als Reihe der Funktionen bezeichnet und mit  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  symbolisiert.

b) Konvergiert die Funktionenreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  (also die Funktionenfolge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ) punktweise (oder sogar gleichmäßig), so wird (analog zu den Zahlenreihen) auch die Grenzfunktion mit  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  symbolisiert.

c) Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  heißt absolut konvergent, wenn die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$  punktweise konvergiert.

2.) Aus den Sätzen 10.4 und 10.7 ergibt sich:

a) Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  eine gleichmäßig konvergente Reihe der stetigen Funktionen  $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ , so ist die Grenzfunktion  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und es gilt

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx \quad \text{für alle } [a, b] \subseteq D$$

b) Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen  $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(a)$  für ein  $a \in D$



Konvergenz. Ist die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  gleichmäßig konvergent,  
so konvergiert die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  punktweise gegen eine  
differenzierbare Funktion  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ , und es gilt  $(\sum_{n=1}^{\infty} f_n)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ .

### 10.9 Satz (Konvergenzkriterium von Weierstraß)

Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Funktionen  $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ , für die  
die Reihe der Supremumsnormen  $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_D$  konvergiert.  
Dann ist die Funktionsreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  absolut und gleichmäßig  
konvergent.

Beweis: Sei  $x \in D$ . Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_D$ ,  
damit ist die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  nach dem Majoranten-  
kriterium absolut konvergent.

Folglich konvergiert die Funktionsreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$   
absolut gegen eine Grenzfunktion  $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ .

Für alle  $\epsilon > 0$  gibt es wegen der Konvergenz von  
 $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_D$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $n \geq n_0$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_D = \left| \sum_{k=1}^n \|f_k\|_D - \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_D \right| < \epsilon,$$

für alle  $x \in D$  ergibt sich dann  $|s_n(x) - f(x)| =$

$$= \left| \sum_{k=1}^n f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_D < \epsilon$$

Folglich ist die Funktionsreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  sogar gleichmäßig  
konvergent.