

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, so daß für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $|g_n(x) - g(x)| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, die Schranke n_0 kann also gleichmäßig für alle $x \in \mathbb{R}$ gewählt werden.

Man sagt, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent gleichmäßig gegen g , es gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

Gleichmäßige Konvergenz bedeutet geometrisch, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Schranke n_0 gibt, so daß für alle $n \geq n_0$ die Graphen G_n ganz in einem Streifen um G_g der Breite 2ε liegen; die Beziehung $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$ ist ja mit $g(x) - \varepsilon < g_n(x) < g(x) + \varepsilon$ gleichwertig.

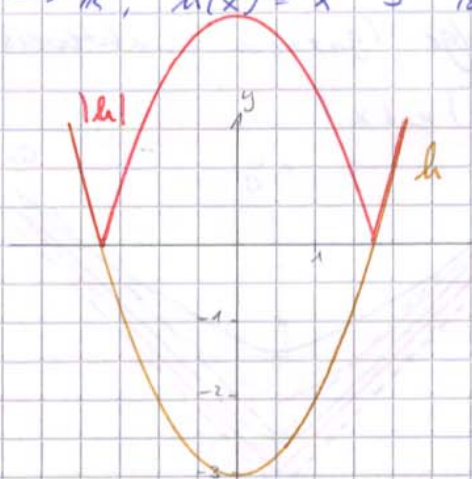
27.05.05

3.) Für eine Funktion $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir die Supremumsnorm

$$\|h\| = \|h\|_D = \begin{cases} \sup \{ |h(x)| \mid x \in D \}, & \text{falls } h \text{ beschränkt} \\ \infty & \text{falls } h \text{ unbeschränkt} \end{cases}$$

Etwa für $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 - 3$ ist $\|h\|_{\mathbb{R}} = \infty$ und

$$\|h\|_{[-1,1]} = 3.$$



Die Bezeichnung „Norm“ ist gerechtfertigt, da für alle $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a) \|f\|_D = 0 \iff f(x) = 0 \text{ für alle } x \in D \iff f = 0$$

$$b) \| \lambda \cdot f \|_D = |\lambda| \cdot \| f \|_D$$

$$c) \| f + g \|_D \leq \| f \|_D + \| g \|_D$$

Mit Hilfe der Supremumsnorm lässt sich die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionsfolge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf D gegen $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ über

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \| g_n - g \|_D < \varepsilon$$

charakterisieren:

" $\Leftarrow$ " Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt $\| g_n - g \|_D < \varepsilon$; damit gilt $|g_n(x) - g(x)| = |(g_n - g)(x)| \leq \| g_n - g \|_D < \varepsilon$ für alle $x \in D$.

" $\Rightarrow$ " Sei $\varepsilon > 0$. Zu $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in D$ gilt $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon'$; damit ist $\| g_n - g \|_D = \sup \{ |g_n(x) - g(x)| \mid x \in D \} < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

10.2. Definition

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem gemeinsamen Definitionsbereich D ; ferner sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

a) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt punktweise konvergent gegen f , wenn

$$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

gilt; d.h. es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in D$.

b) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt gleichmäßig konvergent gegen f , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ gilt,}$$

d.h. es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_D = 0$.

(In jedem ε -Strifen um den Graphen G_f liegen fast alle (nämlich alle ab $n \geq n_0$) Graphen G_{f_n})

10.3. Beispiele

1.) Für $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, konvergiert die Funktionsfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ für } x \neq 1 \\ 1 & , \text{ für } x = 1 \end{cases} \quad \text{die Konvergenz ist nicht gleichmäßig.}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in]0, 1[$ gilt $|f_n(x) - f(x)| =$

$$= x^n \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 1 \quad \text{und damit } \|f_n - f\|_{[0, 1]} = 1, \text{ insbesondere}$$

$$\text{also } \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{[0, 1]} = 1 \neq 0$$

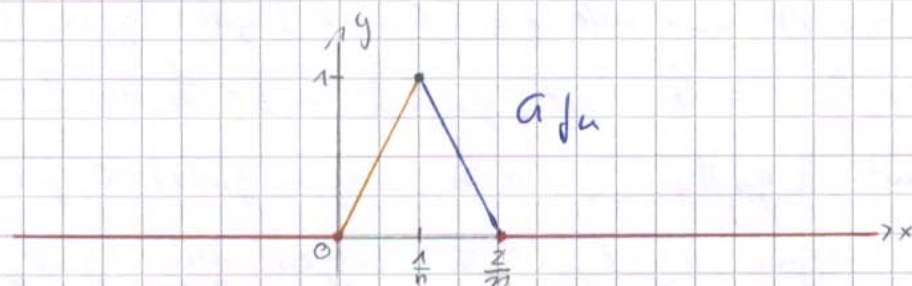
2.) Für $g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, konvergiert die Funktionsfolge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = |x|, \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \in \mathbb{R} \text{ gilt } |g_n(x) - g(x)| \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{und damit } \|g_n - g\|_{\mathbb{R}} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

3.) (F 96 III 2) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Funktionenfolge $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ für } x \leq 0 \text{ und } x \geq \frac{2}{n} \\ nx & , \text{ für } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ -n(x - \frac{2}{n}) & , \text{ für } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \end{cases}$$



Man untersuche $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf punktweise und auf gleichmäßige Konvergenz.

a) Sei $x \in \mathbb{R}$

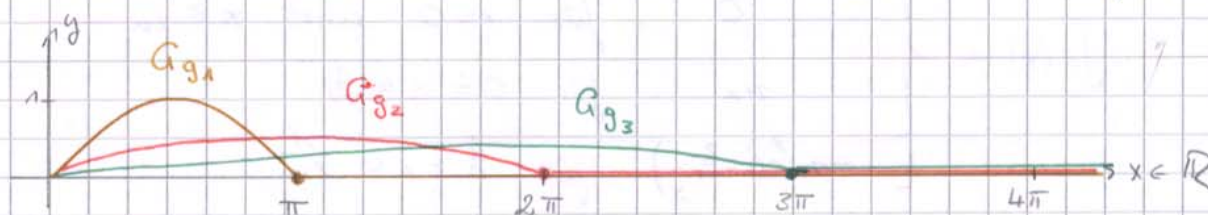
Fall 1: $x \leq 0$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f_n(x) = 0$ und damit $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$

Fall 2: $x > 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{2}{n_0} < x$. Für alle $n \geq n_0$ dann $\frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} < x$, also $f_n(x) = 0$ und damit $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$.

Damit konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f_n(\frac{1}{n}) = n \cdot \frac{1}{n} = 1$ und damit $\|f_n\|_{\infty} \geq 1$; der Skizze entnimmt man sogar $\|f_n\|_{\infty} = 1$. Folglich gilt $\|f_n - f\|_{\infty} = \|f_n\|_{\infty} \geq 1$, insbesondere konvergiert $(\|f_n - f\|_{\infty})_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gegen 0, die Konvergenz ist also nicht gleichmäßig.

4.) Sei $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $g_n: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n} & , \text{für } x \leq n \cdot \pi \\ 0 & , \text{für } x > n \cdot \pi \end{cases}$



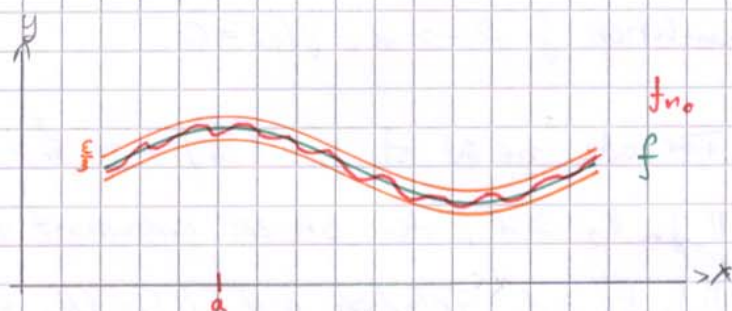
Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in [0, n \cdot \pi]$ gilt $|g_n(x)| = \left| \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$ mit $g_n\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) = \frac{1}{n} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{n}$ und damit $\|g_n\|_{[0, n \cdot \pi]} = \frac{1}{n}$, wegen $g_n(x) = 0$ für alle $x > n \cdot \pi$ sogar $\|g_n\|_{\mathbb{R}_0^+} = \frac{1}{n}$. Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_{\mathbb{R}_0^+} = 0$ konvergiert also $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion $g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 0$.

10.4 Satz

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ die gleichmäßig gegen eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f stetig, und für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $[a, b] \subseteq D$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Beweis: Wir zeigen die Stetigkeit von f im Punkt $a \in D$ mit dem ϵ - δ -Kriterium.



Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f\|_0 < \frac{\epsilon}{3}$ für alle $n \geq n_0$ sowie wegen der Stetigkeit von f_{n_0} ein $\delta > 0$, so daß für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$

gilt $|\int_{n_0}(x) - \int_{n_0}(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ damit ergibt es sich aber

$$|\int(x) - \int(a)| \leq \underbrace{|\int(x) - \int_{n_0}(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|\int_{n_0}(x) - \int_{n_0}(a)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|\int_{n_0}(a) - \int(a)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \text{ Folglich ist } f \text{ im Punkt } a \in D \text{ stetig.}$$

Die stetige Funktion f ist insbesondere über $[a, b]$ integrierbar.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dabei

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{\leq \|f_n - f\|_0} dx \leq \int_a^b \|f_n - f\|_0 dx = \underbrace{\|f_n - f\|_0}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \cdot (b-a) \rightarrow \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ damit ist } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

10.5 Beispiele

- 1.) Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der stetigen Funktionen $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die (im Punkt $a=1$) unstetigen Funktionen $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \neq 1 \\ 1, & \text{für } x = 1 \end{cases}$ f ist aber integrierbar mit

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 = \\ &= \int_0^1 f(x) dx \end{aligned}$$

- 2.) Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der stetigen Funktionen von Beispiel 10.3 (3) konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die stetige Nullfunktion, ferner ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = \int_0^{\frac{2}{n}} f_n(x) dx = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot 1}_{\text{Dreiecksfläche}} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$