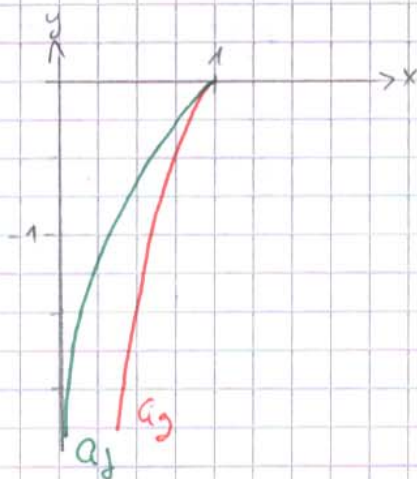
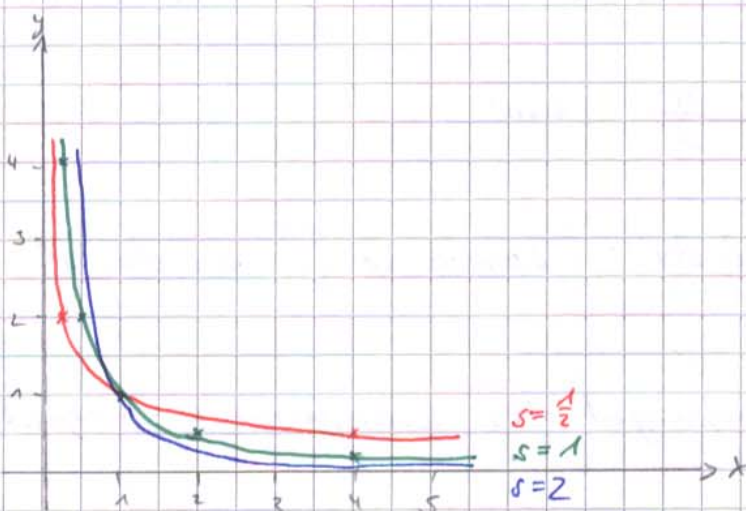


b) Für $g:]0,1[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ist $\int_{\alpha}^1 g(x) dx = \int_{\alpha}^1 \frac{\ln x}{x} dx =$
 $= \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_{\alpha}^1 = 0 - \frac{1}{2} (\ln \alpha)^2 \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} -\infty$, damit
 existiert das uneigentliche Integral 2. Art $\int_0^1 g(x) dx$ nicht.



3.) Für $s > 0$ sei $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^s}$



Wegen $\int_1^b f(x) dx = \begin{cases} \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right]_1^b = \frac{b^{-s+1} - 1}{-s+1} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} \infty & \text{für } 0 < s < 1 \\ \left[\ln x \right]_1^b = \ln b \xrightarrow{b \rightarrow \infty} \infty & \text{für } s = 1 \\ \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right]_1^b = \frac{b^{-s+1} - 1}{-s+1} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} \frac{1}{s-1} & \text{für } s > 1 \end{cases}$

existiert das uneigentliche Integral 1. Art $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}$

genau für $s > 1$, und wegen

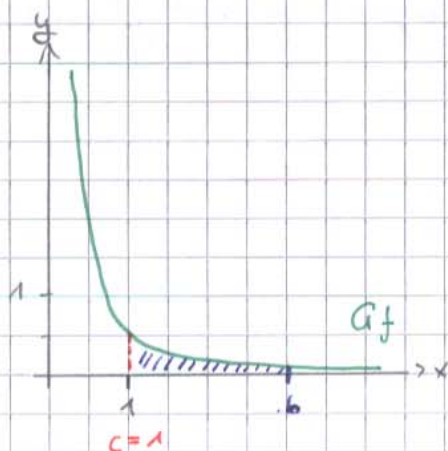
$$\int_{\alpha}^1 f(x) dx = \begin{cases} \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right]_{\alpha}^1 = \frac{1 - \alpha^{-s+1}}{-s+1} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{s-1} & \text{für } s > 1 \\ \left[\ln x \right]_{\alpha}^1 = -\ln \alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} \infty & \text{für } s = 1 \\ \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right]_{\alpha}^1 = \frac{1 - \alpha^{-s+1}}{-s+1} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} \infty & \text{für } 0 < s < 1 \end{cases}$$

existiert das uneigentliche Integral 2. Art $\int_0^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s}$ genau
 für $0 < s < 1$.

25.05.05

Damit existiert $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ für kein $s > 0$.

4.) Für $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$, erhalten wir mit der



Substitution $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = t^2$

mit $g'(t) = 2t$ dann:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int f(g(t)) \cdot g'(t) = \int \frac{1}{\sqrt{t^2}(t^2+1)} \cdot 2t dt = \\ &= 2 \cdot \int \frac{dt}{t^2+1} = 2 \arctan + C = \\ &= 2 \arctan \sqrt{x} + C \end{aligned}$$

* Wegen $\int_1^b f(x) dx = [2 \arctan \sqrt{x}]_1^b = 2 \arctan \sqrt{b} - 2 \arctan \sqrt{1}$
 $\xrightarrow{b \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}$ konvergiert das uneigentliche Integral 1. Art

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \frac{\pi}{2}, \text{ und}$$

* Wegen $\int_x^1 f(x) dx = [2 \arctan \sqrt{x}]_x^1 = 2 \arctan \sqrt{1} - 2 \arctan \sqrt{x}$
 $\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{\pi}{2}$ konvergiert das uneigentliche Integral 2. Art

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

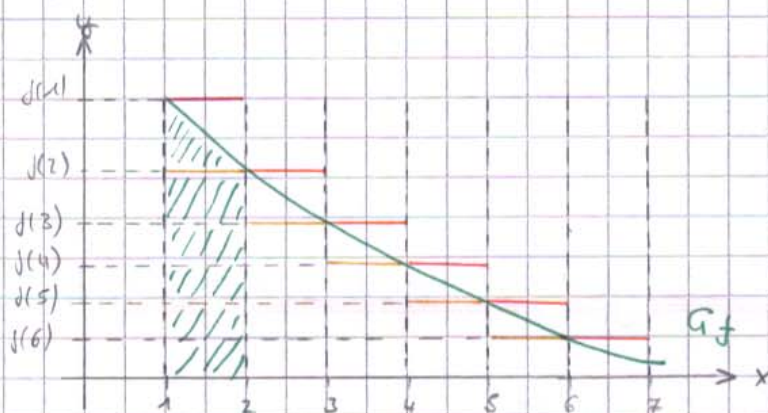
Damit existiert $\int_0^{\infty} f(x) dx$ mit $\int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{\infty} f(x) dx = \pi$

5.) Da $\sin$ eine ungerade Funktion ist, gilt $\int_{-a}^a \sin x dx = 0$ für $a > 0$. Dennoch existiert das uneigentliche Integral $\int_0^{\infty} \sin x dx$ nicht, da $\int_0^b \sin x dx = [-\cos x]_0^b = -\cos b - (-\cos 0) = 1 - \cos b$ keinen Grenzwert für $b \rightarrow \infty$ besitzt.

9.16 Satz (Integralvergleichskriterium für Reihen)

Sei $f: [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton fallende Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [1, \infty[$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ genau dann wenn das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konvergiert, Reihensumme und Integralwert stimmen im allgemeinen jedoch nicht überein.

Beweis:



Für alle $h \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(h) \geq f(x) \geq f(h+1)$$

für alle $x \in [h, h+1]$ und

$$\text{demnach } \int_h^{h+1} f(h) dx \geq \int_h^{h+1} f(x) dx \geq \int_h^{h+1} f(h+1) dx$$

also

$$\underline{f(h) \geq \int_h^{h+1} f(x) dx \geq f(h+1)}$$

Folglich ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k), \text{ also}$$

$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \quad (n \in \mathbb{N})$$

" $\Rightarrow$ " Wegen $f \geq 0$ steigt $\int_1^b f(x) dx$ für wachsendes $b \geq 1$ und ist durch $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ nach oben beschränkt; damit konvergiert $\int_1^{\infty} f(x) dx$

" $\Leftarrow$ " Die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ nichtnegativer Glieder ist durch $\int_1^{\infty} f(x) dx$ nach oben beschränkt, damit ist $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ und auch $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergent.

9.17 Beispiele

Für $s > 0$ ist $f: [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^s}$ monoton fallend und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [1, \infty[$.

1.) Für $s > 1$ konvergiert das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x) dx$, daher ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ konvergent, etwa für $s=2$ gilt $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = 1$ und $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

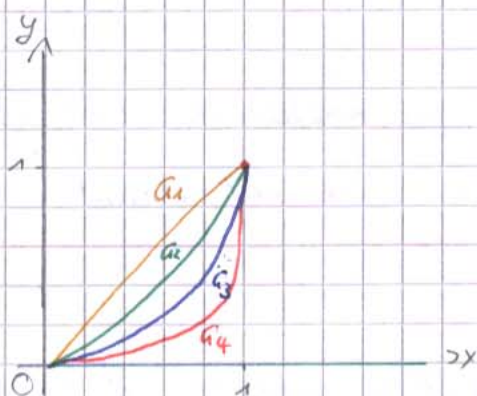
2.) Für $0 < s \leq 1$ konvergiert das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x) dx$ nicht, daher ist die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ divergent.

§ 10 Funktionenfolgen und -reihen;

Potenzreihen

10.1. Bemerkung

1.) Für alle $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktionen $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Für jedes $x \in [0, 1]$



konvergiert die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ der Funktionswerte mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$

Damit nähert sich die Funktionsfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für jeden Punkt x des Definitionsbereiches $[0, 1]$ eine Grenzfunktion, nämlich $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

Man sagt, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen f , es gilt:

$$\forall x \in [0,1] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Die Schranke n_0 hängt dabei von ε und von x ab, für

$$x \in]0,1[\text{ gilt } |f_n(x) - f(x)| = x^n < \varepsilon \Leftrightarrow n \ln x < \ln \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \underset{\ln x < 0}{n} > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}, \text{ es ist also } n_0 \geq \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \text{ zu w\u00e4hlen.}$$

F\u00fcr jedes $1 > \varepsilon > 0$ ist $\frac{\ln \varepsilon}{\ln x}$ streng monoton wachsend

$$\text{in } x \in]0,1[\text{ mit } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} = 0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} = \infty;$$

damit kann es keine gleichm\u00e4\u00dfig f\u00fcr alle $x \in]0,1[$ g\u00fcltige und damit nur $\varepsilon > 0$ abh\u00e4ngige Schranke n_0 geben.

Die Konvergenz verl\u00e4uft an den verschiedenen Punkten $x \in [0,1]$ unterschiedlich schnell.

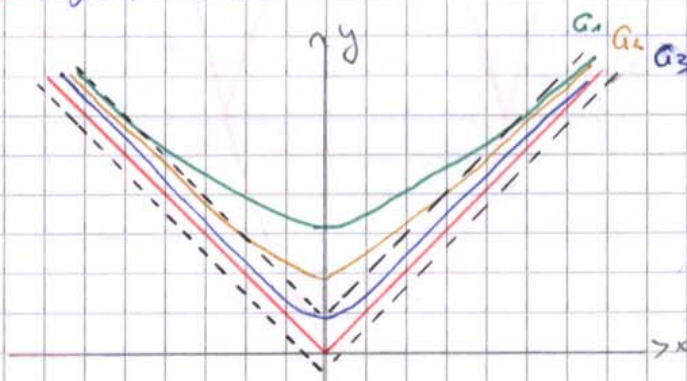
2.) F\u00fcr alle $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktionen $g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}. \text{ F\u00fcr alle } x \in \mathbb{R} \text{ gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{x^2 + 0} = |x|; \text{ damit konvergiert}$$

die Funktionenfolge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen die Funktion

$$\underline{g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}, \quad g(x) = |x|$$



F\u00fcr alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt dabei $|g_n(x) - g(x)| =$

$$= \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| \right| = \left| \frac{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}^2 - |x|^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} \right| = \frac{\frac{1}{n^2}}{\underbrace{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}}_{\geq 0} + \underbrace{|x|}_{\geq 0}} \leq \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}$$

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, so daß für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $|g_n(x) - g(x)| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, die Schranke n_0 kann also gleichmäßig für alle $x \in \mathbb{R}$ gewählt werden.

Man sagt, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen g , es gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$$

Gleichmäßige Konvergenz bedeutet geometrisch, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Schranke n_0 gibt, so daß für alle $n \geq n_0$ die Graphen G_n ganz in einem Streifen um G_g der Breite 2ε liegen; die Beziehung $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$ ist ja mit $g(x) - \varepsilon < g_n(x) < g(x) + \varepsilon$ gleichwertig.

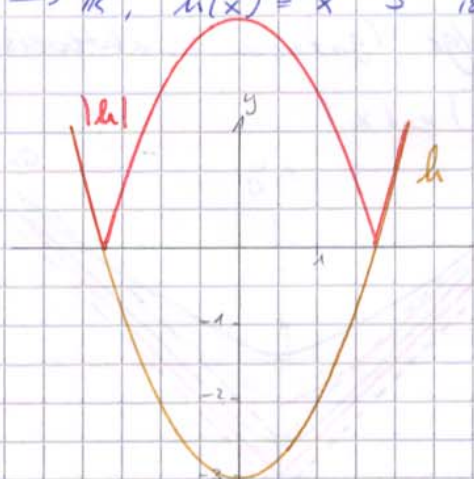
27.05.05

3.) Für eine Funktion $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir die Supremumsnorm

$$\|h\| = \|h\|_D = \begin{cases} \sup \{ |h(x)| \mid x \in D \}, & \text{falls } h \text{ beschränkt} \\ \infty & \text{falls } h \text{ unbeschränkt} \end{cases}$$

Etwa für $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 - 3$ ist $\|h\|_{\mathbb{R}} = \infty$ und

$$\|h\|_{[-1,1]} = 3.$$



Die Bezeichnung „Norm“ ist gerechtfertigt, da für alle $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a) \|f\|_D = 0 \iff f(x) = 0 \text{ für alle } x \in D \iff f = 0$$