

2.) Es ist $\int_1^4 e^{\sqrt{t}} dt = 2 \int_1^4 e^{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \sqrt{t} dt$, und mit

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = x e^x$, sowie $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = \sqrt{t}$ ergibt sich also

$$\begin{aligned} \int_1^4 e^{\sqrt{t}} dt &= 2 \int_1^4 f(g(t)) \cdot g'(t) dt = 2 \cdot \int_{g(1)}^{g(4)} f(x) dx = \\ &= 2 \cdot \int_1^2 x e^x dx = 2 \cdot \left[(x-1)e^x \right]_1^2 = 2(e^2 - 0) = 2e^2 \end{aligned}$$

Die Behandlung von $\int_0^4 e^{\sqrt{t}} dt$ ist mit dieser Substitution zunächst nicht möglich, da $g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = \sqrt{t}$, in $t=0$ nicht differenzierbar ist, für alle $a > 0$ gilt aber wie oben

$$\int_a^4 e^{\sqrt{t}} dt = 2 \cdot \int_{\sqrt{a}}^2 x e^x dx = 2 \cdot \left[(x-1)e^x \right]_{\sqrt{a}}^2 = 2 \cdot (e^2 - (\sqrt{a}-1)e^{\sqrt{a}})^{\sqrt{a}}$$

und mit dem Grenzübergang $a \rightarrow 0+$ ergibt sich $\int_0^4 e^{\sqrt{t}} dt = 2(e^2 + 1)$.

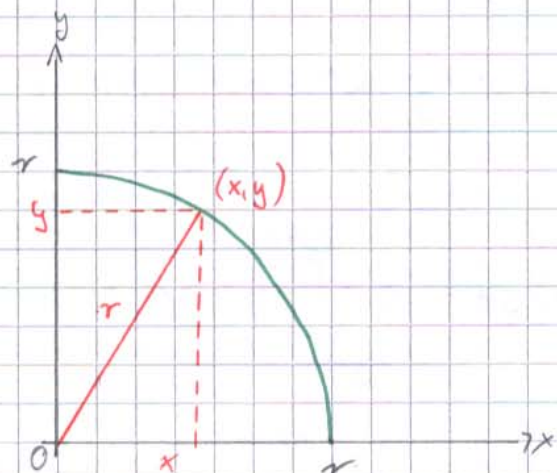
20.05.05

3.) Man kann $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx$ aber direkt mit $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{\sqrt{x}}$, und der Substitution $g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = t^2$ mit $g'(t) = 2t$ berechnen, es ist dann

$$\begin{aligned} \int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx &= \int_{g(0)}^{g(4)} f(x) dx = \int_0^2 f(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int_0^2 e^{\sqrt{t^2}} \cdot 2t dt = \\ &= 2 \cdot \int_0^2 t e^t dt = 2 \left[(t-1)e^t \right]_0^2 = 2(e^2 + 1) \end{aligned}$$

Mit der Substitution $x = t^2$ mit $dx = 2t dt$ erhält man also $\int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^{\sqrt{t^2}} 2t dt = 2 \cdot \int t e^t dt = 2(t-1)e^t + C = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C$

4.) Wir betrachten den Kreis mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius $r > 0$,



für die im 1. Quadranten liegenden Punkte folgt aus $x^2 + y^2 = r^2$ schon

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Mit $f: [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, und $g: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$,

$g(t) = r \cos t$ mit $g'(t) = -r \sin t$

ergibt sich dann für den Flächeninhalt des Viertelkreises

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \int_{g(\frac{\pi}{2})}^{g(0)} f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(g(t)) \cdot g'(t) dt =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \underbrace{\sqrt{r^2 - (r \cos t)^2}}_{r^2 - \sin^2 t} (-r \sin t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sin t \cdot r \sin t dt =$$

$$= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = r^2 \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin t \cos t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = r^2 \left[\frac{\pi}{4} - 0 \right] = \frac{r^2 \pi}{4}$$

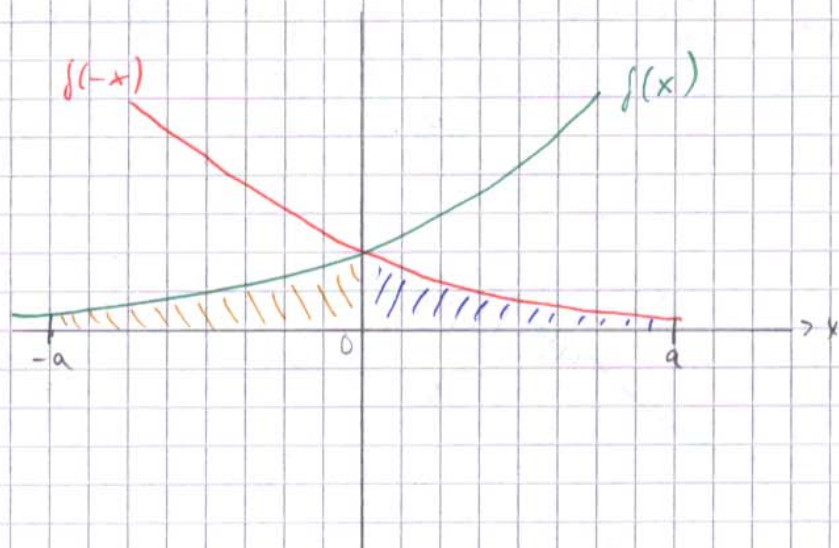
9.13 Bemerkung

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Intervall D sowie ein $a > 0$ mit $[-a; a] \subseteq D$. Dann gilt

1.) Mit der Substitution $x = g(t) = -t$ und $dx = (-1) dt$ ergibt sich

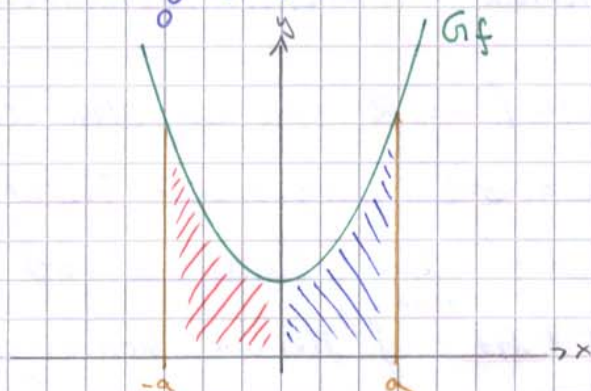
$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_{g(a)}^{g(0)} f(x) dx = \int_a^0 f(-t) (-1) dt =$$

$$= \int_0^a f(-t) dt = \int_a^0 f(-x) dx$$

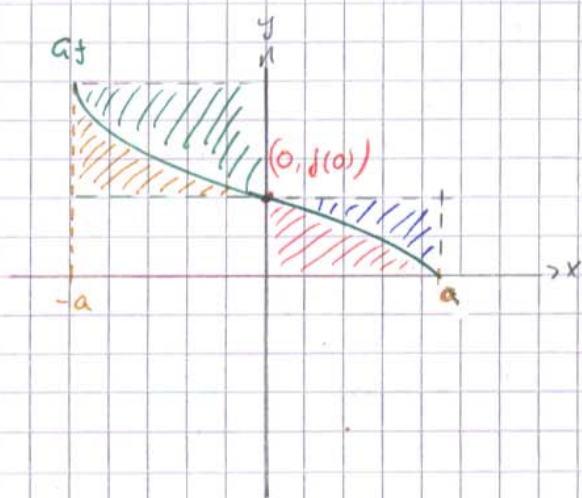


2.) Ist f gerade, also G_f achsensymmetrisch zur y -Achse
 so ist $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$ und damit

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$



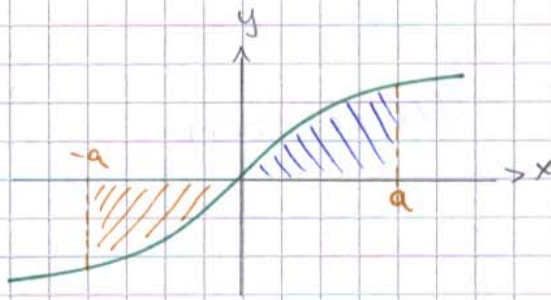
3.) Ist G_f punktsymmetrisch zu $(0, f(0))$, so ist $f(-x) + f(x) = 2f(0)$



für alle $x \in D$ und damit

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \\ &= \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx = \\ &= \int_0^a (f(-x) + f(x)) dx = 2a f(0) \end{aligned}$$

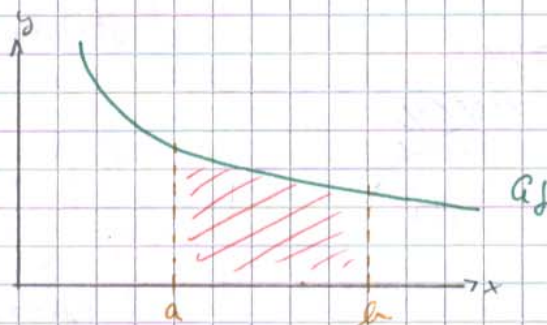
4.) Ist speziell f ungerade, also G_f punktsymmetrisch zum Ursprung, so ist $f(0) = 0$ und damit $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$



9.14 Definition

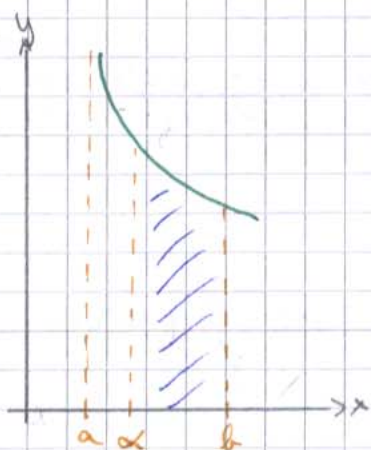
Das bestimmte Riemann-Integral $\int_a^b f(x) dx$ setzt eine beschränkte Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall $[a, b]$ voraus. Mit Hilfe von Grenzwerten lassen sich auch die Integrationsgrenzen $\pm \infty$ sowie an den Grenzen unbeschränkte Funktionen behandeln.

1.) Sei $f: [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ eine auf allen Teilintervallen $[a, b] \subseteq [a, \infty[$ integrierbare Funktion. Existiert der Grenzwert $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$, so heißt das uneigentliche Integral 1. Art $\int_a^\infty f(x) dx$ konvergent und sein Wert ist $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$. Entsprechend ist das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ für Funktionen $f:]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ erklärt.



2.) Sei $f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf allen Teilintervallen $[a, b] \subseteq]a, b]$ integrierbar. Existiert der Grenzwert $\lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_{\alpha}^b f(x) dx$, so heißt das uneigentliche Integral 2. Art.

$$\int_a^b f(x) dx \text{ konvergent und sein Wert ist } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_{\alpha}^b f(x) dx$$

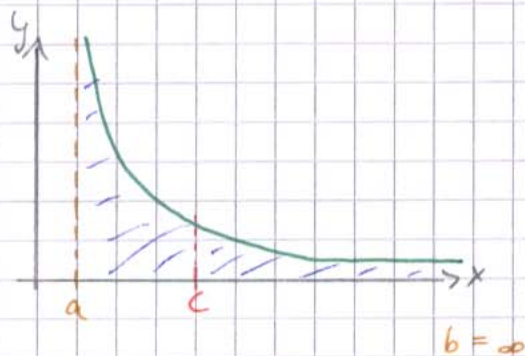


Entsprechend ist das uneigentliche Integral 2. Art

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^{\beta} f(x) dx$$

für Funktionen $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ erklärt.

3.) Sei nun $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ eine auf allen Teilintervallen $[\alpha, \beta] \subseteq]a, b[$ integrierbare Funktion, dabei ist $a = -\infty$ und $b = \infty$ zugelassen, ferner sei $a < c < b$. Existieren



beide uneigentliche Integrale

$$\int_a^c f(x) dx \text{ und } \int_c^b f(x) dx,$$

so heißt $\int_a^b f(x) dx$ konvergent,

und sein Wert ist $\int_a^b f(x) dx =$

$$= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Diese Funktion ist unabhängig von der Wahl des Punktes c !

9.15 Beispiele

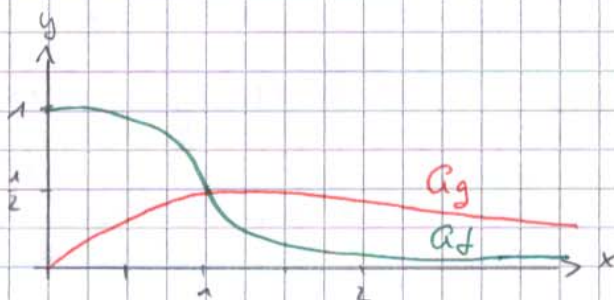
1a) Für $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ist $\int_0^b f(x) dx =$
 $= \int_0^b \frac{dx}{x^2+1} = [\arctan x]_0^b = \arctan b - \arctan 0 =$
 $= \arctan b \xrightarrow{b \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}$

Damit konvergiert das uneigentliche Integral 1. Art mit
 $\int_0^\infty f(x) dx = \frac{\pi}{2}$

b) Für $g: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ist $\int_0^b g(x) dx =$
 $= \frac{1}{2} \int_0^b \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_0^b = \frac{1}{2} \ln(1+b^2) - \frac{1}{2} \ln 1 =$
 $= \frac{1}{2} \ln(1+b^2) \xrightarrow{b \rightarrow \infty} +\infty$

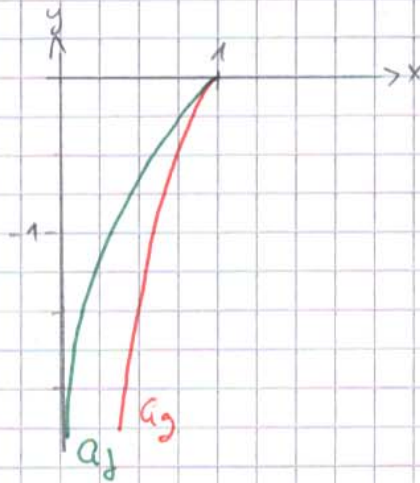
Damit konvergiert das uneigentliche Integral 1. Art

$\int_0^\infty g(x) dx$ nicht!



2a) Für $f:]0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ ist $\int_\alpha^1 f(x) dx = \int_\alpha^1 \ln x dx =$
 $= [x \ln x - x]_\alpha^1 = -1 - (\alpha \ln \alpha - \alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} -1$; damit
konvergiert das uneigentliche Integral 2. Art mit
 $\int_0^1 f(x) dx = 1$

b) Für $g:]0,1[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ist $\int_{\alpha}^1 g(x) dx = \int_{\alpha}^1 \frac{\ln x}{x} dx =$
 $= \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_{\alpha}^1 = 0 - \frac{1}{2} (\ln \alpha)^2 \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} -\infty$, damit
 existiert das uneigentliche Integral 2. Art $\int_0^1 g(x) dx$ nicht.



3.) Für $s > 0$ sei $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^s}$

