

Koeff. Vergleich:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = 3 \\ -2\alpha - \beta + \mu = -2 \\ \alpha = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2, \mu = 2$$

$$\text{Also ist } f(x) = \frac{x^4 + 1}{x(x-1)^2} = x + 2 + \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{x-1} + 2 \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\rightarrow \int f(x) dx = \frac{1}{2} x^2 + 2x + \ln|x| + 2 \cdot \ln|x-1| - 2 \frac{1}{x-1}$$

Man beachte, daß beim Ansatz für die Partialbruchzerlegung der Zählergrad stets um 1 niedriger ist als der Nennergrad, es ist

$$\frac{\beta}{x-1} + \frac{\mu}{(x-1)^2} = \frac{\beta(x-1) + \mu}{(x-1)^2}$$

18.05.05

9.9. Satz

Seien $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen auf einem Intervall D . Für alle $a, b \in D$ gilt dann

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = \left[u(x) \cdot v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$$

Insbesondere erhält man

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

Man nennt diese Integrationsmethode partielle Integration.

Beweis:

Die Funktion $\bar{f}: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{f}(x) = u(x) \cdot v(x)$, ist stetig differenzierbar mit $\bar{f}'(x) = u'(x) v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ für alle $x \in D$.

Damit ist $\bar{f} = u \cdot v$ eine Stammfunktion von $u'v + uv'$, und wir erhalten $\left[u(x) \cdot v(x) \right]_a^b = \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x) \cdot v'(x)) dx = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx$, also

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = \left[u(x) \cdot v(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$$

9.10 Beispiele

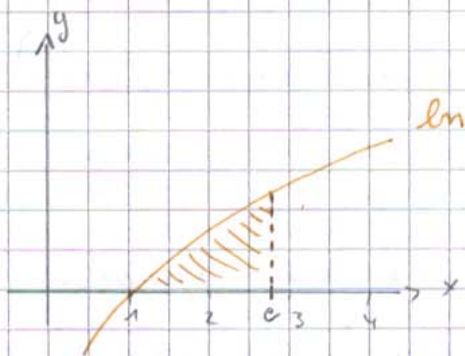
1.) Für $\int x \cdot e^x dx$ wählt man $u(x) = x$ mit $u'(x) = 1$ sowie $v'(x) = e^x$ mit $v(x) = e^x$ und erhält

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= x e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - e^x + C = \\ &= (x-1) e^x + C \end{aligned}$$

2.) Sei $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Für $\int x^r \ln x dx$ wählt man $u(x) = \ln x$ mit $u'(x) = \frac{1}{x}$ sowie $v'(x) = x^r$ mit $v(x) = \frac{1}{r+1} x^{r+1}$ und erhält

$$\begin{aligned} \int x^r \ln x dx &= \frac{1}{r+1} x^{r+1} \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{r+1} x^{r+1} dx = \\ &= \frac{1}{r+1} x^{r+1} \ln x - \frac{1}{r+1} \int x^r dx = \\ &= \frac{x^{r+1}}{(r+1)^2} \left[(r+1) \ln x - 1 \right] + C \end{aligned}$$

Speziell für $r=0$ erhält man $\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$



$$\int_1^e \ln x \, dx = \left[x(\ln x - 1) \right]_1^e = 0 - (-1) = 1$$

3.) Es ist $\int \arctan x \, dx = \int \underbrace{1}_{v'(x)} \cdot \underbrace{\arctan x}_{u(x)} \, dx =$

$$= x \arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx =$$

$$\stackrel{\text{ZP } \frac{g'(x)}{g(x)}}{=} x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

4.) Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt $\int \sin^n x \, dx = \int \underbrace{\sin^{n-1} x}_{u(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{v'(x)} \, dx =$

$$= \underbrace{\sin^{n-1} x}_{u(x)} \cdot \underbrace{(-\cos x)}_{v(x)} - \int \underbrace{(n-1) \sin^{n-2} x}_{u'(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{v(x)} \, dx =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cdot \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x} \, dx =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \sin^n x \, dx$$

$$\text{also } n \cdot \int \sin^n x \, dx = \sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx,$$

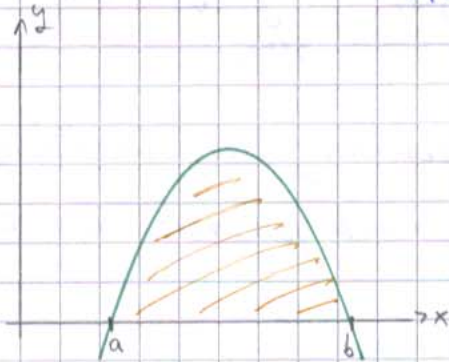
womit sich die Rekursionsformel $\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cdot \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$ ergibt. Damit ist etwa:

$$* \int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} \int 1 \, dx = \frac{1}{2} (x - \sin x \cos x) + C$$

$$* \int \sin^3 x \, dx = -\frac{1}{3} \sin^2 x \cos x + \frac{2}{3} \int \sin x \, dx = -\frac{1}{3} \cos x \cdot (\sin^2 x + 2) + C$$

usw.

$$5.) \text{ Für } a < b \text{ gilt } \int_a^b \underbrace{(b-x)}_{u(x)} \underbrace{(x-a)}_{v'(x)} \, dx = \underbrace{\left[(b-x) \frac{(x-a)^2}{2} \right]_a^b}_{=0} -$$



$$- \int_a^b (-1) \cdot \frac{(x-a)^2}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int_a^b (x-a)^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{(x-a)^3}{3} \right]_a^b = \frac{(b-a)^3}{6}$$

9.11 Satz

Seien $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf dem Intervall D_f sowie $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $W_g \subseteq D_f$. Für alle $a, b \in D_g$ gilt dann:

$$\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) \, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) \, dx$$

Insbesondere erhält man

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t) \, dt = \int f(x) \, dx \quad \text{mit der Substitution } x = g(t)$$

Man nennt diese Methode Integration durch Substitution.

Beweis: Gemäß Satz 9.7 besitzt f eine Stammfunktion $F: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, diese ist stetig differenzierbar mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in D_f$. Damit ist auch $h: D_g \rightarrow \mathbb{R}$, $h(t) = F(g(t))$, stetig differenzierbar,

und nach der Kettenregel gilt $h'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$ für alle $t \in D_g$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) dt &= [h(t)]_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = \\ &= [F(x)]_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx \end{aligned}$$

[Mit der Schreibweise $\frac{dx}{dt}$ für die Ableitung der Substitution $x = g(t)$ nach t ist $\frac{dx}{dt} = g'(t)$ und nach formaler Umstellung $dx = g'(t) dt$.]

9.12. Beispiele

1.) Es ist $\int_0^1 t \cdot e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} \int_0^1 e^{-t^2} (-2t) dt$ und mit

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, sowie $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = -t^2$ ergibt sich also

$$\begin{aligned} \int_0^1 t \cdot e^{-t^2} dt &= -\frac{1}{2} \int_0^1 f(g(t)) \cdot g'(t) dx = -\frac{1}{2} \int_{g(0)}^{g(1)} f(x) dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{-1} e^x dx = -\frac{1}{2} [e^x]_0^{-1} = -\frac{1}{2} [e^{-1} - 1] = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \end{aligned}$$

Mit der Substitution $x = -t^2$ mit $\frac{dx}{dt} = -2t$, also $dx = (-2t) dt$ erhält man also

$$\begin{aligned} \int t e^{-t^2} dt &= -\frac{1}{2} \int e^{-t^2} (-2t) dt = -\frac{1}{2} \int e^x dx = -\frac{1}{2} e^x + C = \\ &= -\frac{1}{2} e^{-t^2} + C \end{aligned}$$

2.) Es ist $\int_1^4 e^{\sqrt{t}} dt = 2 \int_1^4 e^{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \sqrt{t} dt$, und mit

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = x e^x$, sowie $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = \sqrt{t}$ ergibt sich also

$$\begin{aligned} \int_1^4 e^{\sqrt{t}} dt &= 2 \int_1^4 f(g(t)) \cdot g'(t) dt = 2 \cdot \int_{g(1)}^{g(4)} f(x) dx = \\ &= 2 \cdot \int_1^2 x e^x dx = 2 \cdot \left[(x-1)e^x \right]_1^2 = 2(e^2 - 0) = 2e^2 \end{aligned}$$

Die Behandlung von $\int_0^4 e^{\sqrt{t}} dt$ ist mit dieser Substitution zunächst nicht möglich, da $g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = \sqrt{t}$, in $t=0$ nicht differenzierbar ist, für alle $a > 0$ gilt aber wie oben

$$\int_a^4 e^{\sqrt{t}} dt = 2 \cdot \int_{\sqrt{a}}^2 x e^x dx = 2 \cdot \left[(x-1)e^x \right]_{\sqrt{a}}^2 = 2 \cdot (e^2 - (\sqrt{a}-1)e^{\sqrt{a}})^{\sqrt{a}}$$

und mit dem Grenzübergang $a \rightarrow 0+$ ergibt sich $\int_0^4 e^{\sqrt{t}} dt = 2(e^2 + 1)$.

20.05.05

3.) Man kann $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx$ aber direkt mit $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{\sqrt{x}}$, und der Substitution $g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = t^2$ mit $g'(t) = 2t$ berechnen, es ist dann

$$\begin{aligned} \int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx &= \int_{g(0)}^{g(4)} f(x) dx = \int_0^2 f(g(t)) \cdot g'(t) dt = \int_0^2 e^{\sqrt{t^2}} \cdot 2t dt = \\ &= 2 \cdot \int_0^2 t e^t dt = 2 \left[(t-1)e^t \right]_0^2 = 2(e^2 + 1) \end{aligned}$$

Mit der Substitution $x = t^2$ mit $dx = 2t dt$ erhält man also $\int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^{\sqrt{t^2}} 2t dt = 2 \cdot \int t e^t dt = 2(t-1)e^t + C = 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C$