

5.) Wegen $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $x \in]-1; 1[$ erhält man

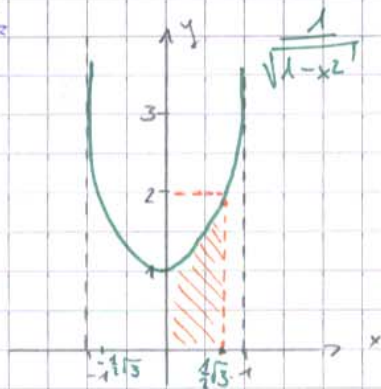
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \text{ und wegen } \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} =$$

$$= \arcsin \frac{1}{2}\sqrt{3} - \arcsin 0 =$$

$$= \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}$$



$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin b \xrightarrow{b \rightarrow 1^-} \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

13.05.05

6.) $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + C$

Sei $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion ohne Nullstellen. Dann ist $\bar{f}: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{f}(x) = \ln |g(x)|$, stetig differenzierbar mit $\bar{f}'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ für alle $x \in D$.

Damit gilt $\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + C$

$$\bullet \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = - \ln |\cos x| + C$$

$$\bullet \int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln |\sin x| + C$$

$$\bullet \int \frac{e^x}{1+e^x} \, dx = \ln |1+e^x| + C$$

$$\bullet \int \frac{1}{1+e^x} \, dx = - \int \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1} \, dx = - \ln |e^{-x}+1| + C$$

Alternativ: $\int \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} dx = \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx = x - \ln(1+e^x) + c$

7.) Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit Stammfunktion F . Seien $m, t \in \mathbb{R}$ mit $m \neq 0$ und sei $D^* = \{x \in \mathbb{R} \mid mx+t \in D\}$.

Dann ist $G: D^* \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x) = \frac{1}{m} F(mx+t)$, stetig differenzierbar mit $G'(x) = f(mx+t)$ für alle $x \in D^*$. Also gilt

$$\int f(mx+t) dx = \frac{1}{m} F(mx+t) + c$$

$$* \int e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + c$$

$$* \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} dx \stackrel{u=\frac{x}{a}}{=} \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{a}} \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a} dx$

Staatsexamen
relevant $\rightarrow$

9.8. Bemerkung

1.) Stammfunktionen von gebrochen rationalen Funktionen lassen sich häufig mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung ermitteln:

a) Wir bestimmen $\alpha, \beta, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\mu}{x+1} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1, 0\}$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x^2-1)} &= \frac{\alpha(x^2-1) + \beta(x+1) + \mu(x-1)}{x(x^2-1)} = \\ &= \frac{(\alpha+\beta+\mu)x^2 + (\beta-\alpha)x - \alpha}{x(x^2-1)} \end{aligned}$$

$$\text{also } 1 = (\alpha+\beta+\mu)x^2 + (\beta-\alpha)x - \alpha \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Koeffizientenvergleich liefert $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\beta - \gamma = 0$, $-\alpha = 1$, d.h.
 $\alpha = -1$, $\beta = \gamma = \frac{1}{2}$

Wir haben also $\frac{1}{x(x^2-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+1}$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x(x^2-1)} dx = -\ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$$

b) Wir bestimmen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta x + \gamma}{x^2+1} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Es ist dann

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{\alpha(x^2+1) + (\beta x + \gamma)x}{x(x^2+1)} = \frac{(\alpha+\beta)x^2 + \gamma x + \alpha}{x(x^2+1)}$$

$$\text{also } 1 = (\alpha+\beta)x^2 + \gamma x + \alpha \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Koeff.vergleich ergibt: $\alpha + \beta = 0$, $\gamma = 0$, $\alpha = 1$, d.h. $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 0$

Wir haben also $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+1}$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x(x^2+1)} dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$$

2.) Diese Methode ermöglicht bisweilen auch die Untersuchung von Reihen auf Konvergenz sowie die Berechnung ihrer Summe.

a) Es ist $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{\alpha}{k} + \frac{\beta}{k+2} = \frac{\alpha(k+2) + \beta k}{k(k+2)} = \frac{(\alpha+\beta)k + 2\alpha}{k(k+2)}$

Koeff.vergleich:

$$\alpha + \beta = 0, \quad 2\alpha = 1, \quad \text{also } \alpha = \frac{1}{2} \quad \text{und } \beta = -\frac{1}{2}$$

Für $n \geq 3$ gilt also:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) - \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \end{aligned}$$

b) Es ist (s.o.) $\frac{1}{k(k^2-1)} = \dots = (-1) \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \frac{1}{k-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} \right)$,

also ist für $n \geq 4$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k^2-1)} &= (-1) \cdot \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k+1} \\ &= (-1) \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= (-1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \end{aligned}$$

3.) Die Partialbruchzerlegung geht von einer ganzrationalen Funktion aus, deren Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist, dies läßt sich durch eine geeignete Polynomdivision stets erreichen. Etwa für $f: \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^4+1}{x(x-1)^2}$, ergibt sich über

$$(x^4+1) : (x^3-2x^2+x) = x+2 \quad \text{mit Rest } 3x^2-2x+1$$

$$f(x) = x+2 + \frac{3x^2-2x+1}{x^3-2x^2+x}$$

Mit dem Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{3x^2-2x+1}{x(x-1)^2} &= \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{(x-1)^2} = \frac{\alpha(x-1)^2 + \beta(x-1)x + \gamma x}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{(\alpha+\beta)x^2 + (-2\alpha-\beta+\gamma)x + \alpha}{x(x-1)^2} \end{aligned}$$

Koeff.-vergleich:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = 3 \\ -2\alpha - \beta + \mu = -2 \\ \alpha = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2, \mu = 2$$

Also ist $f(x) = \frac{x^4+1}{x(x-1)^2} = x+2 + \frac{1}{x} + 2 \frac{1}{x-1} + 2 \frac{1}{(x-1)^2}$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \frac{1}{2} x^2 + 2x + \ln|x| + 2 \cdot \ln|x-1| - 2 \frac{1}{x-1}$$

Man beachte, daß beim Ansatz für die Partialbruchzerlegung der Zählergrad stets um 1 niedriger ist als der Nennergrad, es ist

$$\frac{\beta}{x-1} + \frac{\mu}{(x-1)^2} = \frac{\beta(x-1) + \mu}{(x-1)^2}$$