

Damit gilt unabhängig von der gegenseitigen Lage der Punkte  $a, b$  und  $c$  stets  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

11.05.05

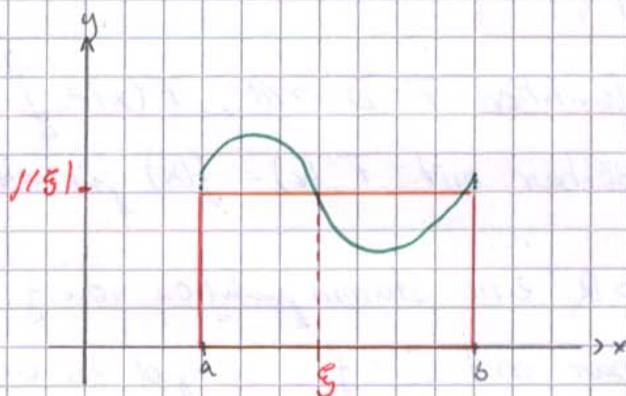
## 9.5 Satz

Seien  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige und  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbare Funktion mit  $g \geq 0$ . Dann gilt:

a) (Mittelwertsatz der Integralrechnung) Es gibt ein  $\xi \in [a, b]$  mit

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b-a).$$

[Die Fläche zwischen  $f$  und der  $x$ -Achse ist gleich einer Rechtecksfläche mit der Intervalllänge  $b-a$  als Breite und einem geeigneten Funktionswert  $f(\xi)$  als Höhe]



b) (Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Es gibt ein  $\xi \in [a, b]$  mit

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x) dx$$

Beweis:

i) Nach dem Satz von Weierstraß gibt es  $p, q \in [a, b]$  mit  $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$  für alle  $x \in [a, b]$ , wegen  $g(x) \geq 0$  also  $f(p) \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq f(q) \cdot g(x)$  für

alle  $x \in [a, b]$ , und wegen der Monotonie des Integrals folgt  

$$f(p) \cdot \underbrace{\int_a^b g(x) dx}_{\geq 0} \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq f(q) \cdot \underbrace{\int_a^b g(x) dx}_{\geq 0}$$

Für  $\int_a^b g(x) dx = 0$  gilt damit auch  $\int_a^b f(x) g(x) dx = 0$ , man wähle  $\xi \in [a, b]$  beliebig. Für  $A = \int_a^b g(x) dx \neq 0$  ist  $A > 0$  und damit  $f(p) \leq \frac{1}{A} \int_a^b f(x) g(x) dx \leq f(q)$ , nach dem Zwischenwertsatz gibt es also ein  $\xi \in [a, b]$  mit  $f(\xi) = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b f(x) g(x) dx$ , also  $\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x) dx$

a) folgt aus b) für  $g=1$

## 9.6. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion auf einem Intervall  $D$  sowie  $a \in D$ . Dann gilt:

a) Die Integralfunktion  $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ , ist differenzierbar mit  $F'(x) = f(x)$  für alle  $x \in D$

b) Ist  $G: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f$ , d.h. ist  $G$  differenzierbar mit  $G' = f$ , so gibt es ein  $c \in \mathbb{R}$  mit  $G(x) = F(x) + c$  für alle  $x \in D$ .

c) Es gilt  $\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$  für alle  $b \in D$ , dabei ist  $G$  eine beliebige Stammfunktion von  $f$ .

Unter dem unbestimmten Integral  $\int f(x) dx$  von  $f$  versteht man die Menge aller Stammfunktionen von  $f$ , also  $\int f(x) dx = F(x) + C$

Beweis:

a) Sei  $x \in D$  sowie  $h \neq 0$  mit  $x+h \in D$ . Dann ist

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left[ \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt,$$

und nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es ein  $\xi_h$  zwischen  $x$  und  $x+h$  mit  $\int_x^{x+h} f(t) dt = f(\xi_h) \cdot h$ .

Für  $h \rightarrow 0$  ist  $\xi_h \rightarrow x$  und wegen der Stetigkeit von  $f$  (im Punkte  $x$ ) gilt

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(\xi_h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)$$

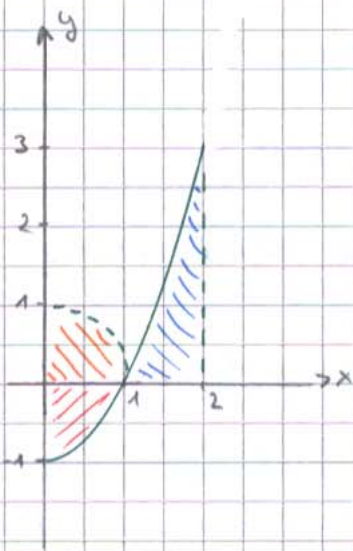
damit ist  $F$  im Punkte  $x$  differenzierbar, mit  $F'(x) = f(x)$

b) Die Funktion  $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = G(x) - F(x)$ , ist differenzierbar mit  $h'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$  für alle  $x \in D$ , und nach Satz 8.15 a) gibt es ein  $c \in \mathbb{R}$  mit  $h(x) = c$ , also  $G(x) = F(x) + c$  für alle  $x \in D$ .

c) Es gilt  $\int_a^b f(x) dx = F(b) = (F(b) + c) - (\underbrace{F(a)}_{=0} + c) = G(b) - G(a)$ , dabei geht  $F(a) = 0$  ein.

### 9.7. Beispiel

1.) Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  ist  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$  stetig differenzierbar mit  $F'(x) = \frac{1}{n+1} (n+1) \cdot x^n = x^n$ , damit ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^n$ , und wir erhalten  $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ . Damit läßt sich für jede Polynomfunktion eine Stammfunktion explizit ausgeben, z.B.



$$\int (x^2 - 1) dx = \frac{1}{3} x^3 - x + C$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 (x^2 - 1) dx &= \left[ \frac{1}{3} x^3 - x \right]_0^2 \\ &= \left( \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 2 \right) - \left( \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 0^3 \right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

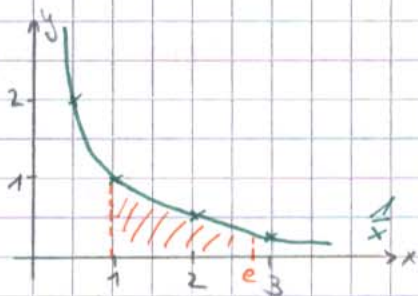
(„blaue Fläche - rote Fläche“)

$$\begin{aligned} \int_0^2 |x^2 - 1| dx &= \int_0^1 (1 - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx \\ &= \left[ x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 + \left[ \frac{1}{3} x^3 - x \right]_1^2 = \left( \frac{2}{3} - 0 \right) + \left( \frac{2}{3} - \left( -\frac{2}{3} \right) \right) = \\ &= \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2 \end{aligned}$$

(„gelbe Fläche + blaue Fläche“)

2.) Entsprechend zu 1 gilt  $\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$  für alle  $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Des weiteren ist  $F: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \ln|x|$ , stetig differenzierbar mit  $F'(x) = \frac{1}{x}$ , damit ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$  und es ist

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$



Der natürliche Logarithmus kann auch über

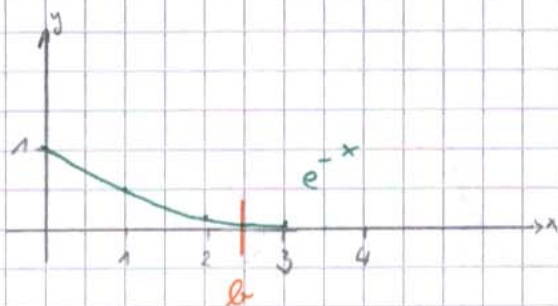
$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \left[ \ln t \right]_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

als Integralfunktion von  $f$  eingeführt werden, es ist

$$\int_1^e \frac{dt}{t} = \ln e = 1$$

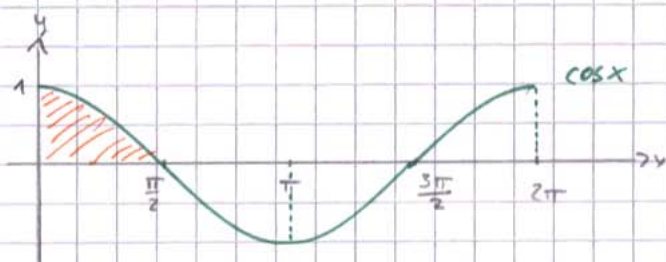
3.) Für alle  $a > 1$  ist  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = a^x$ , stetig differenzierbar mit  $f'(x) = a^x \cdot \ln a$ , für  $a \neq 1$  ist also  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ .

Insbesondere gilt  $\int e^x dx = e^x + C$  und  $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$   
 für  $a = e$  für  $a = \frac{1}{e}$



$$\int_0^b e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^b = -e^{-b} - (-e^0) = 1 - e^{-b} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} 1$$

- 4.) a)  $\sin' x = \cos x$  für alle  $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \int \cos x dx = \sin x + C$   
 b)  $\cos' x = -\sin x$  für alle  $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \int \sin x dx = -\cos x + C$   
 c)  $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$  für alle  $x \in D_{\tan} \Rightarrow \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$   
 d)  $\cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$  für alle  $x \in D_{\cot} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$



$$\int_0^{2\pi} \cos x dx = [\sin x]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{\pi} \cos x dx = [\sin x]_0^{\pi} = 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

5.) Wegen  $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  für  $x \in ]-1; 1[$  erhält man

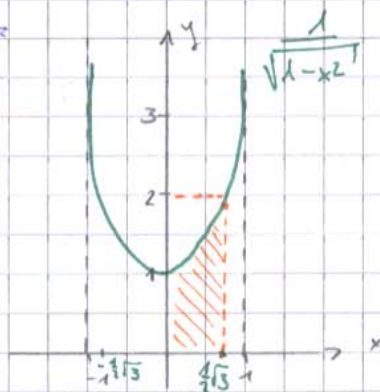
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \text{ und wegen } \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  ergibt sich  $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} =$$

$$= \arcsin \frac{1}{2}\sqrt{3} - \arcsin 0 =$$

$$= \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}$$



$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin b \xrightarrow{b \rightarrow 1^-} \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$