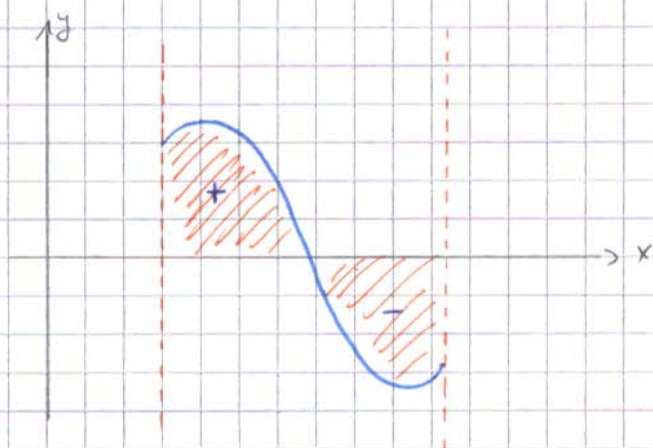


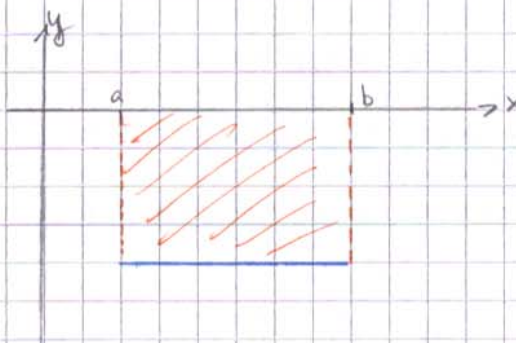
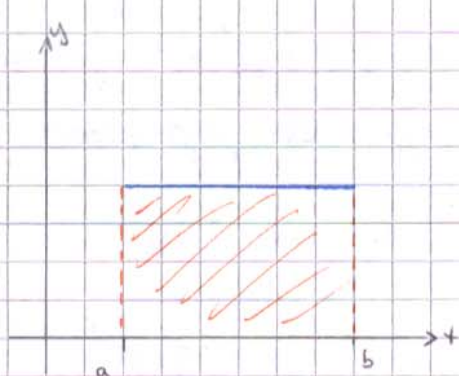
diesen werden wir mit dem Symbol $\int_a^b f(x) dx$ schreiben. Wir folgen hier der auf Bernhard Riemann (1826-1866) zurückgehende Methode



Oberhalb der x-Achse liegende Teilflächen sollen dabei positiv, unterhalb der x-Achse liegende Teilflächen negativ eingehen.

2.) Für eine konstante Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = c$ für alle $x \in [a, b]$ ergibt sich für $c > 0$ ein oberhalb der x-Achse und für $c < 0$ ein unterhalb der x-Achse liegendes Rechteck mit den Seitenlängen $b-a$ und $|c|$. Demnach soll

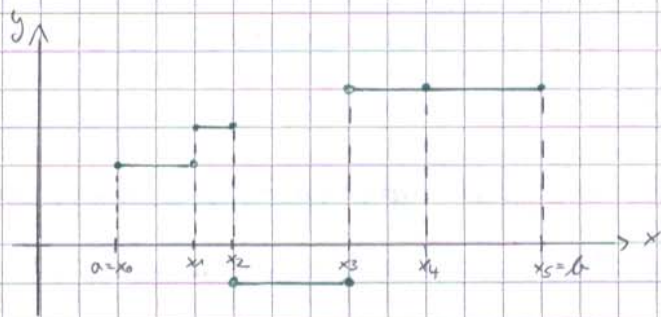
$$\int_a^b f(x) dx = c \cdot (b-a) \text{ gelten.}$$



6.5.05

9.2. Definition und Bemerkung

1.) Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn

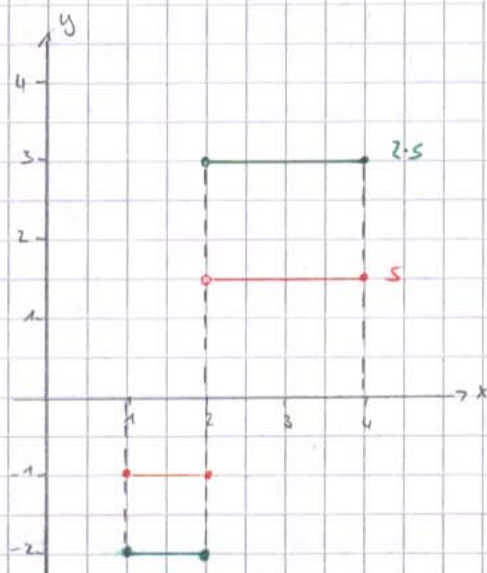
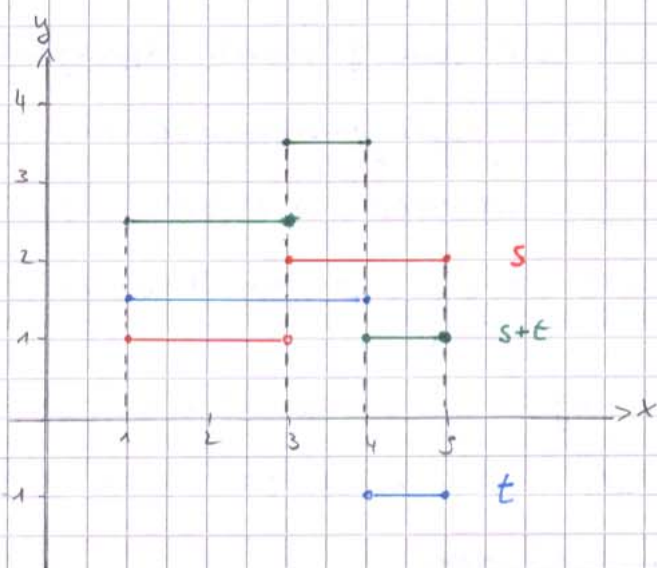


es eine Unterteilung (Zerlegung) $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ des Definitionsintervalls $[a; b]$ gibt, so daß t auf allen offenen Teilintervallen $]x_0; x_1[$, $]x_1; x_2[$, $\dots$, $]x_{n-1}; x_n[$ jeweils konstant ist; für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ gibt es also ein $c_k \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = c_k$ für alle $x \in]x_{k-1}; x_k[$. Die Funktionswerte von t auf den Unterteilungspunkten $x_0, x_1, \dots, x_n$ sind unerheblich. Die Fläche zwischen g_t und der x -Achse setzt sich nun aus endlich vielen Rechtecken zusammen, deren Flächeninhalte berechnet werden können, wir definieren

$$\int_a^b t(x) dx = \sum_{k=1}^n c_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

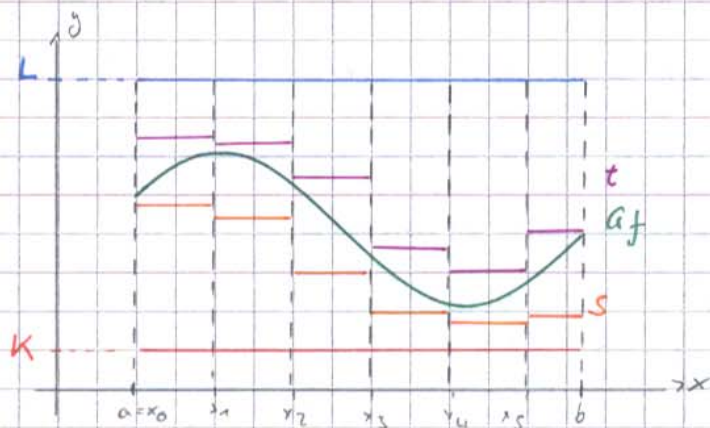
Die gewählte Zerlegung ist zwar nicht eindeutig; so könnte man etwa auf den Punkt x_4 verzichten oder weitere Punkte zur Zerlegung hinzugenommen werden. Am Wert der betrachteten Summe ändert sich allerdings nichts.

- 2) Sind $s, t: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Treppenfunktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$, so sind auch $s+t$, $s-t$, $s \cdot t$ sowie $\lambda \cdot s$ und $|s|$ Treppenfunktionen, man betrachte dazu etwa



9.3 Definition und Bemerkung

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige beschränkte Funktion, es gibt also Konstanten $K, L \in \mathbb{R}$ mit $K \leq f(x) \leq L$ für alle $x \in [a, b]$.

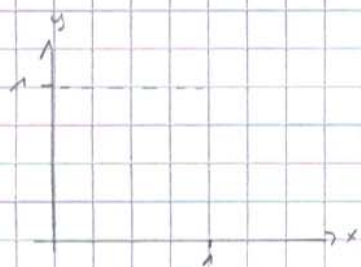


1.) Wir approximieren f zunächst durch Treppenfunktionen von unten, dabei ist die Menge T_n aller Treppenfunktionen $s: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $s \leq f$ wegen $\underline{K} \in T_n$ nichtleer, und für alle $s \in T_n$ gilt $s(x) \leq f(x) \leq L$ für alle $x \in [a, b]$ und damit $\int_a^b s(x) dx \leq L \cdot (b-a)$.
Damit existiert $\int_a^b f(x) dx = \sup \left\{ \int_a^b s(x) dx \mid s \in T_n \right\}$ als Unteriorintegral von f , es stellt geometrisch eine untere Schraube für den gesuchten Flächeninhalt dar.

2.) Entsprechend approximieren wir nun f durch Treppenfunktionen von oben, die Menge T_o aller Treppenfunktionen $t: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \leq t$ ist wegen $\underline{K} \in T_o$ nichtleer, und für alle $t \in T_o$ gilt $\underline{K} \leq f(x) \leq t(x)$ für alle $x \in [a, b]$ und damit $\underline{K} \cdot (b-a) \leq \int_a^b t(x) dx$.
Damit existiert $\int_a^b f(x) dx = \inf \left\{ \int_a^b t(x) dx \mid t \in T_o \right\}$ das Oberintegral von f ; es stellt geometrisch eine obere Schraube für den gesuchten Flächeninhalt dar.

3.) Tatsächlich gibt stets $\int_a^b f(x) dx = \int_a^{b^*} f(x) dx$ ist etwa f selbst eine Treppenfunktion, so gilt wegen $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^{b^*} f(x) dx$ sogar Gleichheit.

Sei nun $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \text{ falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$



Sei nun $s: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion

zur Zerlegung $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ mit $s \leq f$.

für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ liegt in I_{x_{k-1}, x_k} mindestens eine Zahl $\notin \mathbb{Q}$ und damit ist

$s(x) \leq 0$ für alle $x \in]x_{k-1}, x_k[$. Folglich ist $\int_0^1 s(x) dx \leq 0$, also $\int_0^1 f(x) dx = 1$. Entsprechend ist $\int_a^{b^*} f(x) dx = 1$. Die Dirichletfunktion läßt sich also auf diesen Weg kein sinnvoller Flächeninhalt unter ihrem Graphen G_f zuordnen.

(Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805 - 1859)

9.4. Definition und Satz

1.) Eine beschränkte Funktion $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (Riemann-) integrierbar, wenn ihr Unterintegral und ihr Oberintegral übereinstimmen, in diesem Fall heißt $\int_a^b f(x) dx = \int_a^{b^*} f(x) dx = \int_a^{b^*} f(x) dx$ das bestimmte (Riemann-) Integral von f . Es entspricht dem Inhalt der zwischen G_f und der x -Achse eingeschlossenen Fläche.

2.) Eine Funktion $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $s, t: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $s \leq f \leq t$ und $\int_a^b t(x) dx - \int_a^b s(x) dx < \varepsilon$. Damit läßt sich zeigen:

- a) Jede stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar
 b) Jede monotone Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar

3.) Sind $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$,
 so sind auch $f+g$, $f-g$ und $f \cdot g$ sowie $\lambda \cdot f$ und $|f|$
 integrierbar, und es gilt:

$$a) \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$b) \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$c) \text{ Aus } f(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in [a, b] \text{ folgt } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

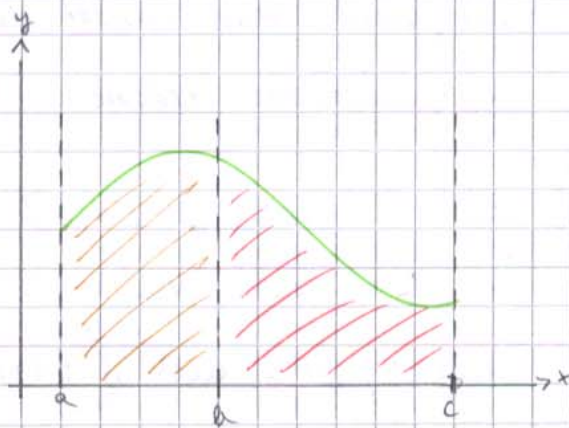
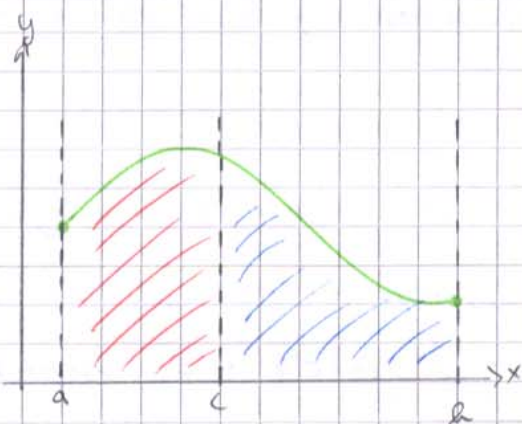
$$d) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Diese Rechenregeln sind für Treppenfunktionen geometrisch
 unmittelbar einsichtig und übertragen sich auf beliebig
 integrierbare Funktionen. Im allgemeinen gilt

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \neq \left(\int_a^b f(x) dx \right) \cdot \left(\int_a^b g(x) dx \right)$$

4.) Wir heften ferner die Konvention $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$

$$\text{ sowie } \int_a^a f(x) dx = 0$$



Damit gilt unabhängig von der gegenseitigen Lage der Punkte a, b und c stets
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$