

3.) Die Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , \text{für } x \neq 0 \\ 1 & , \text{für } x = 0 \end{cases}$

ist in allen Punkten $a \neq 0$ stetig und differenzierbar und es gilt

$$h'(x) = \begin{cases} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} & , \text{für } x \neq 0 \\ 0 & , \text{für } x = 0 \end{cases}$$

wegen $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1 = h(0)$

ist h auch in $a = 0$ stetig. Wegen $\lim_{x \rightarrow 0} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

$$\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x) - \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin x}{2} \right) = 0$$

ist h in $a = 0$ differenzierbar und h' ist stetig.

8.20 Definition

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion sowie $f': D' \rightarrow \mathbb{R}$ ihre Ableitungsfunktion mit $D' = \{a \in D \mid f \text{ in } a \text{ differenzierbar}\}$.

1.) f heißt im Punkt $a \in D'$ zweimal differenzierbar, wenn f' in a differenzierbar ist; $f''(a) = (f')'(a)$ heißt dann 2. Ableitung von f im Punkt a .

2.) Sei $D'' = \{a \in D' \mid f' \text{ in } a \text{ zweimal differenzierbar}\} \neq \emptyset$.
Dann heißt $f'': D'' \rightarrow \mathbb{R}$, $f''(a) = (f')'(a) =$
 $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$ die 2. Ableitung von f

3.) f heißt zweimal differenzierbar, wenn f in jedem Punkt $a \in D$ zweimal differenzierbar ist, f heißt zweimal stetig differenzierbar, wenn zudem f'' stetig ist.

Entsprechend werden die höheren Ableitungen $f''' = f^{(3)}, f^{(4)}, \dots$, erklärt; unter der 0-ten Ableitungen $f^{(0)}$ versteht man f selbst.

8.21 Beispiele

- 1.) Polynomfunktionen sind beliebig oft differenzierbar, bei jeder Ableitung vermindert sich ihr Grad um genau 1. Des weiteren sind gebrochenrationale Funktionen beliebig oft differenzierbar, ihre Ableitungen sind wieder gebrochene Funktionen.
- 2.) Es ist $\sin' x = \cos x$, $\sin'' x = \cos' x = -\sin x$, $\sin''' x = -\sin' x = -\cos x$ und $\sin^{(4)} x = -\cos' x = -(-\sin x) = \sin x$.
- 3.) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\alpha x}$, damit ist f beliebig oft differenzierbar mit $f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$, $f''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x}$, $f'''(x) = \alpha^3 e^{\alpha x}$, ..., $f^{(n)}(x) = \alpha^n \cdot e^{\alpha x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

8.22. Satz

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und a ein Punkt im Inneren von D , in dem f zweimal differenzierbar ist. Dann gilt:

a) Ist $\underline{f'(a) = 0}$ und $\underline{f''(a) < 0}$, so besitzt f in a ein isoliertes lokales **Maximum**.

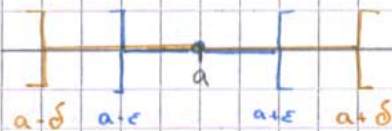
b) Ist $\underline{f'(a) = 0}$ und $\underline{f''(a) > 0}$, so besitzt f in a ein isoliertes lokales **Minimum**.

Beweis:

a) Sei $\delta > 0$ mit $]a - \delta, a + \delta[\subseteq D$. Wegen $0 > f''(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}$ gibt es ein $0 < \epsilon \leq \delta$ mit

$$\frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} < 0 \quad \text{für alle } 0 < |x - a| < \varepsilon \text{ d.h. für alle}$$

$$x \in]a - \varepsilon, a[\cup]a, a + \varepsilon[$$



- * Für alle $x \in]a - \varepsilon, a[$ ist $x - a < 0$ und damit $f'(x) - f'(a) > 0$, also $f'(x) > 0$, also ist f auf $]a - \varepsilon, a[$ streng monoton wachsend.
- * Für alle $x \in]a, a + \varepsilon[$ ist $x - a > 0$ und damit $f'(x) - f'(a) < 0$, also ist $f'(x) < 0$, also ist f auf $]a, a + \varepsilon[$ streng monoton fallend.

Folglich besitzt f in a ein isoliertes lokales Maximum

b) analog zu a)

8.23 Beispiele

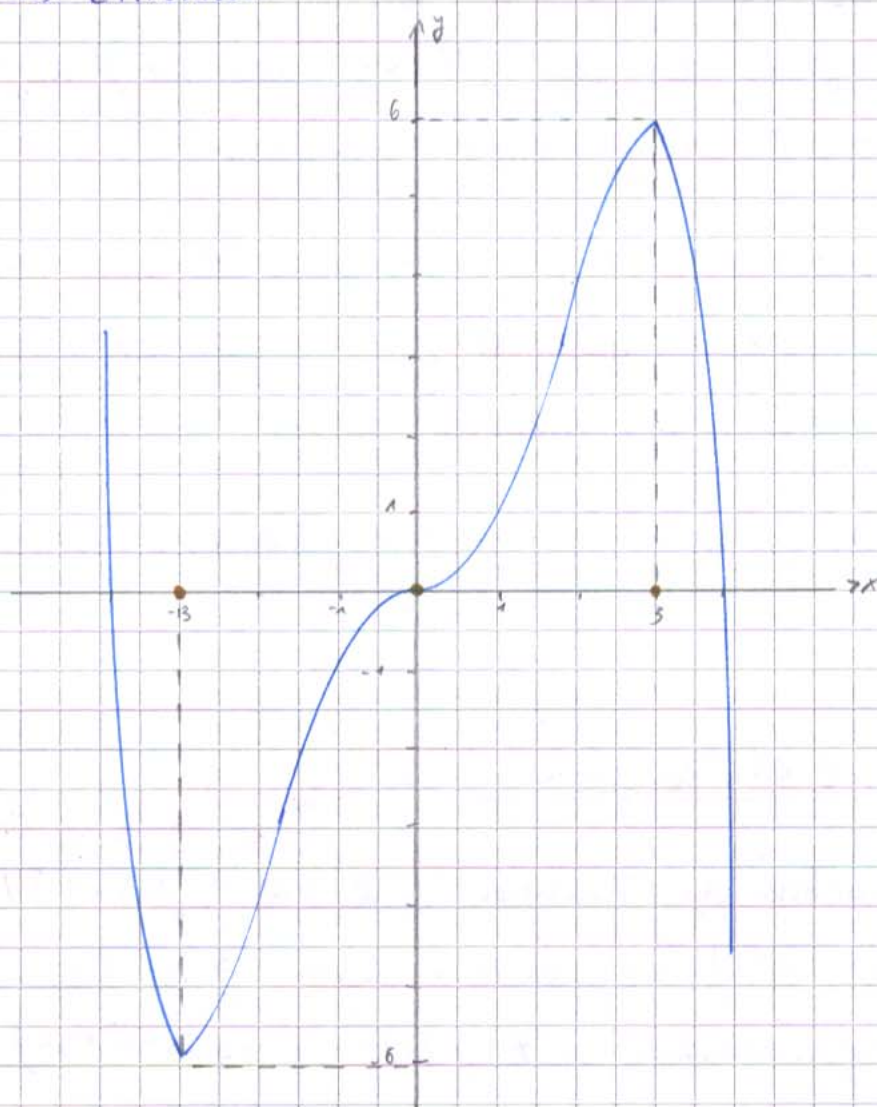
- 1.) Wir untersuchen die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{x}{3}\right)^3 \cdot (15 - x^2) = \frac{1}{27} (15x^3 - x^5)$, auf lokale Extrema. f ist (insbesondere) zweimal differenzierbar mit $f'(x) = \frac{1}{27} (45x^2 - 5x^4) = \frac{5x^2}{27} (9 - x^2)$ und $f''(x) = \frac{1}{27} (90x - 20x^3) = \frac{10x}{27} (9 - 2x^2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Die lokalen Extrema von f finden sich unter den Nullstellen von f' , also $x_1 = -3$, $x_2 = 3$ und $x_3 = 0$

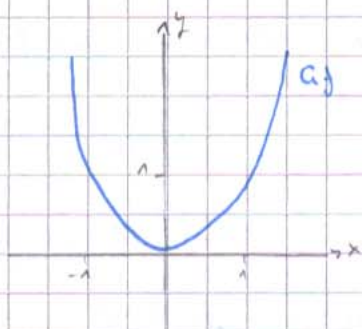
- * Wegen $f'(-3) = 0$ und $f''(-3) = -\frac{30}{27} (9 - 18) > 0$ besitzt f in $x_1 = -3$ ein isoliertes lokales Maximum mit $f(-3) = -6$

- * Wegen $f'(3) = 0$ und $f''(3) = \frac{30}{27} (9 - 18) < 0$ besitzt f in $x_2 = 3$ ein lokales Maximum mit $f(3) = 6$

* Es ist $f'(0)=0$ und $f''(0)=0$. Wegen $f'(x)>0$ für alle $0<|x|<3$ ist f auf $]-3,0[$ und $]0,3[$ jeweils streng monoton wachsend, damit besitzt f in $x_3=0$ kein lokales Extremum



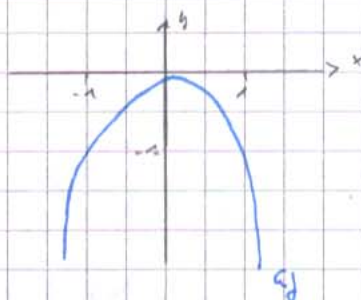
2.) Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ ist beliebig oft differenzierbar mit $f'(x) = 4x^3$ und $f''(x) = 12x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$; damit besitzt f' genau eine Nullstelle, nämlich $x_0 = 0$, mit $f''(x_0) = 0$. f besitzt hier in $x_0 = 0$ sein (eindeutig bestimmtes) globales Minimum.



Entsprechendes

gilt für $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = -x^4$$

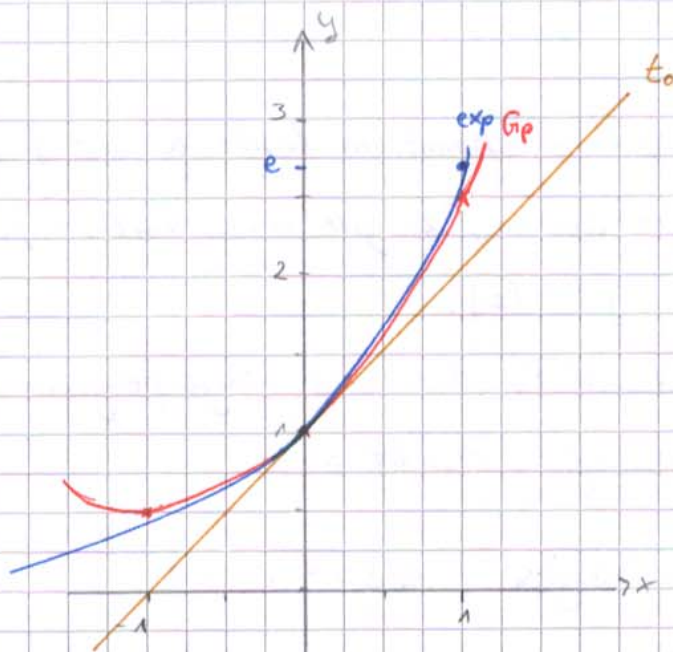


8.24 Bemerkung

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion sowie $a \in \mathbb{R}$.

- 1.) Für die Tangente $t_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t_a(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$, von f im Punkt a gilt $t'_a(x) = f'(a) \cdot 1 = f'(a)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, daher gilt $t_a(a) = f(a)$ und $t'_a(a) = f'(a)$. Man bezeichnet t_a auch als lineare Approximation von f im Punkt a .

Für $f = \exp$ und $a=0$ ergibt sich $t_0(x) = 1 + 1 \cdot (x-0) = 1+x$



- 2.) Die Polynomfunktion $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2} (x-a)^2$ gilt
 $p'(x) = f'(a) \cdot 1 + \frac{f''(a)}{2} \cdot 2(x-a) = f'(a) + f''(a)(x-a)$
und
 $p''(x) = f''(a)$ für alle $x \in \mathbb{R}$; daher gilt $p(a) = f(a)$,
 $p'(a) = f'(a)$ und $p''(a) = f''(a)$.

Für $f = \exp$ und $a=0$ ist $p(x) = 1+x+\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2}$; also ist der Graph eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitel $(-1/\frac{1}{2})$.

Diese quadratische Approximation von f in a ist „deutlich besser“ also f_0 .

8.25 Satz und Definition

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine n -mal differenzierbare Funktion auf einem Intervall D für $n \in \mathbb{N}$ sowie $a \in D$.

1.) Die Polynomfunktion $T_n: D \rightarrow \mathbb{R}$, $T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k =$

$$= \underbrace{f(a)}_{k=0} + \underbrace{f'(a)(x-a)}_{k=1} + \underbrace{\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}_{k=2} + \dots + \underbrace{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{k=n}$$

von Grad $\leq n$ stimmt im Punkt a mit f in den ersten n Ableitungen überein, es gilt also $T_n(a) = f(a)$, $T_n'(a) = f'(a)$, ..., $T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$.

Man nennt T_n das n -te Taylerpolynom von f im (Entwicklungs-) Punkt a .

(Brook Taylor, 1685-1731)

2.) Die Abweichung von f und T_n wird im Restglied $R_{n+1}: D \rightarrow \mathbb{R}$ erfasst, es gilt also die Taylorformel $f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x)$ für alle $x \in D$

3.) Ist f sogar $(n+1)$ -mal differenzierbar, so gibt es für jedes $x \in D$ ein ξ zwischen a und x mit $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$, es ist dies die Lagrangesche

Form des Restglied. (Joseph Louis Lagrange, 1736-1813)