

zu stetigen Funktionen f und g auf $[a; b[$ fortsetzen, damit ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in]a; b[$, da ansonsten nach dem Satz von Rolle zwischen den beiden Nullstellen a und $x_0 \in]a; b[$ von g eine Nullstelle von g' existieren müßte.

Sei nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $]a; b[$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Wir wenden den verallgemeinerten Mittelwertsatz auf die Einschränkung $f|_{[a; x_n]}$ und $g|_{[a; x_n]}$ an und erhalten ein $\xi \in]a; x_n[$ mit

$$\underbrace{(f(x_n) - f(a))}_{=0} \cdot \underbrace{g'(\xi)}_{\neq 0} = \underbrace{(g(x_n) - g(a))}_{=0} \cdot \underbrace{f'(\xi)}_{\neq 0},$$

also $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$. Wegen $a < \xi_n < x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$

ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = a$, und nach Voraussetzung existiert der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ folglich ist auch}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}. \text{ Damit existiert auch der}$$

Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ und stimmt mit

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ überein.}$$

7.04.05

8.18 Beispiele

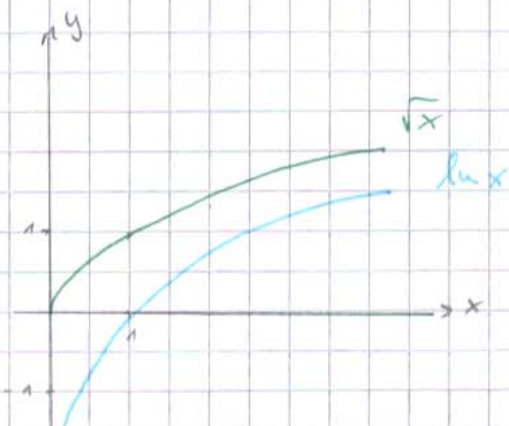
1.) Wir betrachten den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Die Funktionen $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ und $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$ sind differenzierbar mit $f'(x) = \frac{1}{x}$ und $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$, ferner gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ (Fall (II)).

Da der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ existiert

existiert durch der zu betrachtende Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ mit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$



2) Für alle $\alpha > 0$ gilt $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \frac{0}{\infty}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{(-\alpha)x^{-\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha}{-\alpha} = 0$

3) Es ist $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \frac{0}{0}$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{1 \cdot \sin x + x \cos x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{\cos x + (1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x))} = 0$

4.) Die Anwendung der Regel von de l'Hospital auf $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
 liefert die Endlosschleife $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

und $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ Dagegen führt die Um-

formung $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{|x| \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \stackrel{x > 0}{=} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$

5.) Die Regel von de l'Hospital kann auf $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x}$ nicht angewendet werden, da der Nenner $g(x) = x + \cos x$ eine nicht nullstellenfreie Ableitung $g'(x) = 1 - \sin x$ besitzt. Es ist $\frac{x + \sin x}{x + \cos x} = \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\cos x}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1+0}{1+0} = 1$

6.) Die Regel von de l'Hospital kann auch auf $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \sin x}{2x + \cos x}$ nicht angewendet werden, da der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \cos x}{2 - \sin x}$ nicht existiert.

$$\left(\text{es ist } \frac{2 + \cos(2n\pi)}{2 - \sin(2n\pi)} = \frac{2+1}{2+0} = \frac{3}{2} \text{ und } \frac{2 + \cos((2n+1)\pi)}{2 - \sin((2n+1)\pi)} = \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{Es ist wieder } \frac{2 + \sin x}{2 + \cos x} = \frac{2 + \frac{\sin x}{x}}{2 + \frac{\cos x}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{2+0}{2+0} = 1$$

7.) In Folgerung 4.18 (3) haben wir gesehen, daß die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ monoton wächst und nach oben beschränkt ist, also konvergiert, ihren Grenzwert haben wir e genannt.

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)}$ sowie $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x \ln\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)$.

$$\text{Nach der Regel von de l'Hospital gilt } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{\alpha}{x}} \cdot \left(-\frac{\alpha}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha}{x}} = \alpha,$$

und mit der Stetigkeit von $\exp$ ergibt sich $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)} = e^\alpha$. Insbesondere ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha$

8.19. Bemerkung

Sei $f: [a; b[$ eine stetige und auf $]a; b[$ differenzierbare Funktion:

* Existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ im eigentlichen Sinne, so auch $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$,

und f ist auch im Punkte $x = a$ differenzierbar wegen $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = f'(a)$ ist f' im Punkt $x = a$ stetig.

* Gilt $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \pm \infty$, so auch $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm \infty$, damit ist f im Punkt $x = a$ nicht differenzierbar

* Existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ weder im eigentlichen noch im uneigentlichen Sinne, so ist zunächst keine Aussage über die Differenzierbarkeit von f im Punkt a möglich, Beispiel 8.6 (6) zeigt, daß

$f: [0, 1[$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & , \text{ falls } x > 0 \\ 0 & , \text{ falls } x = 0 \end{cases}$
im Punkt 0 differenzierbar ist,

der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ aber nicht existiert.

Analoge Aussagen gelten für die Grenzwerte $x \rightarrow b^-$.

Wir betrachten die folgenden Beispiele:

1.) Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ falls } x < 0 \\ x & , \text{ falls } x \geq 0 \end{cases}$ ist in allen

Punkten $a \neq 0$ stetig und differenzierbar mit

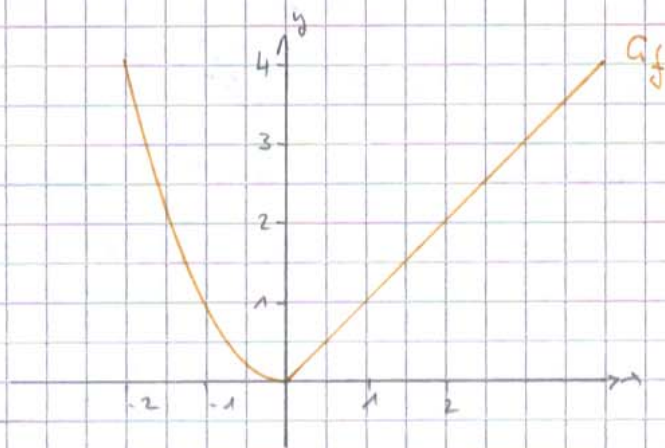
$$f'(x) = \begin{cases} 2x & , \text{ falls } x < 0 \\ 1 & , \text{ falls } x \geq 0 \end{cases} \quad , \text{ wegen } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) =$$

$= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ist f auch in a stetig.

Wegen $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1$ und

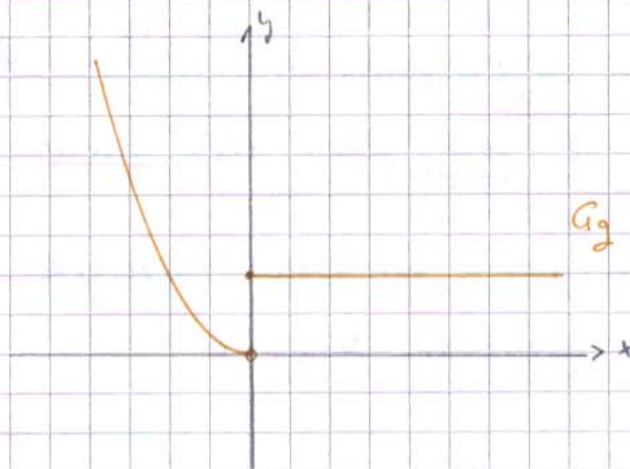
$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0$ existiert der

Differentialquotient $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ nicht, damit ist f in $a=0$ nicht differenzierbar.



2.) Die Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{für } x < 0 \\ 1, & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$ ist in allen Punkten $a \neq 0$ stetig und differenzierbar mit

$$g'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{für } x < 0 \\ 0, & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$



Wegen $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0 \neq g(0)$ ist g in $a=0$ nicht stetig, insbesondere also nicht differenzierbar, die Existenz von $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = 0$ ist unerheblich.

3.) Die Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , \text{für } x \neq 0 \\ 1 & , \text{für } x = 0 \end{cases}$

ist in allen Punkten $a \neq 0$ stetig und differenzierbar und es gilt

$$h'(x) = \begin{cases} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} & , \text{für } x \neq 0 \\ 0 & , \text{für } x = 0 \end{cases} ;$$

wegen $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1 = h(0)$

ist h auch in $a = 0$ stetig. Wegen $\lim_{x \rightarrow 0} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

$$\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x) - \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin x}{2} \right) = 0$$

ist h in $a = 0$ differenzierbar und h' ist stetig.